

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 33 • HEFT 4 • OKTOBER 1938

## *Über die Sekundärelektronen-Emission des Berylliums* Von R. Kollath

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG)

(Mit 11 Abbildungen)

Trotz vieler experimenteller Arbeiten über die Sekundärelektronen-Emission (SE.) ist der eigentliche Mechanismus dieser Erscheinung noch weitgehend ungeklärt; die in letzter Zeit erschienenen größeren Untersuchungen haben das gemeinsame Kennzeichen, daß in ihnen nach Faktoren gesucht wird, die die Größe der SE. wirklich maßgebend beeinflussen. So hat Treloar<sup>1)</sup> den Einfluß der Austrittsarbeit auf die SE. von Wolfram und Molybdän quantitativ festgelegt: Für ein und dasselbe Material nimmt die SE. mit abnehmender Austrittsarbeit zu; wenn diese Zunahme z. B. gegenüber derjenigen der Glühemission nicht sehr erheblich ist, so läßt sich dies mit Hilfe der relativ großen mittleren Energie der Sekundärelektronen (S.) befriedigend deuten. Beim Vergleich verschiedener Materialien fanden dagegen Bruining und de Boer<sup>2)</sup> keine Zusammenhänge zwischen SE. und Austrittsarbeit, offenbar weil wichtigere Einflüsse anderer Art den Einfluß der Austrittsarbeit völlig überdecken. So besitzen Materialien, die bisher im allgemeinen als gute Sekundärstrahler galten, wie z. B. die Alkali- und Erdalkali-Metalle, in der Form von reinen, im Hochvakuum hergestellten Aufdampfschichten nur eine überraschend geringe SE. Es scheint sich also bei der SE. auch nicht um eine spezifische Eigenschaft der elektropositiven Metalle zu handeln, wie man vielleicht nach den guten SE.-Eigenschaften der Alkali-Photoschichten hätte erwarten können. Es ergab sich aber bei diesen Metallen eine erhebliche Vergrößerung der SE., wenn sie oxydiert wurden. Über den wahren Grund des günstigen Einflusses der Oxydierung lassen sich endgültige Aussagen wohl noch nicht machen, Bruining u. de Boer erklären sich diese Zunahme mit der festeren Bindung der Metallelektroden im Metalloxyd und der dadurch verbesserten Möglichkeit der Energieübertragung von den Primärelektronen (P.) auf diese Metallelektroden<sup>3)</sup>.

1) R. G. Treloar, Proc. Phys. Soc. **49**. S. 392. 1937.

2) H. Bruining u. J. H. de Boer, Physica **4**. S. 473. 1937; **5**. S. 17. 1938.

3) Vgl. H. Fröhlich, Ann. d. Phys. [5]. **13**. S. 229. 1932.

Schließlich habe ich selbst auf Grund einer eingehenden Untersuchung des Berylliums darauf hingewiesen, daß — jedenfalls für das Beryllium — eine Erklärung der erhaltenen Höchstaussbeuten allein mit Hilfe der Oxydation der Beryllium-Schichten nicht möglich ist, daß vielmehr zur Erzielung höchster Ausbeuten an Beryllium-Schichten die Herstellung einer bestimmten Struktur in der Schicht notwendig ist. In der vorliegenden Arbeit sind die verschiedenen Versuche und ihre Ergebnisse im einzelnen dargestellt, die zu den bisher nur auszugsweise veröffentlichten Schlüssen<sup>1)</sup> geführt haben.

### 1. Versuche an im Vakuum aufgedampften Berylliumschichten

Für die Untersuchung der SE. von im Vakuum aufgedampften Be-Schichten wurde zunächst eine Dreielektrodenröhre verwendet,

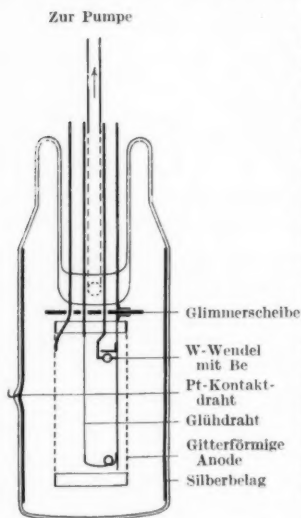


Abb. 1. Dreielektrodenröhre zur Untersuchung der Sekundäremission von Be-Aufdampfschichten

wie sie schematisch in Abb. 1 dargestellt ist. In der Mitte der zylindrischen Röhre ist ein Glühdraht ausgespannt, der von einer gitterförmigen Anode umgeben ist; als Sekundärstrahler dient die Wandung der Röhre, die im allgemeinen mit einem chemisch hergestellten Silberbelag versehen war. Das Be wird in einer Wolframwendel verdampft und schlägt sich als Deckschicht auf dem Silberbelag der Wand nieder. Bringt man jetzt die gitterförmige Anode auf ein festes positives Potential gegenüber dem Glühdraht (Kathode) und variiert man das Potential des Sekundärstrahlers (Spannungszuführung durch einen seitlich eingeschmolzenen Platin-Kontaktdraht) zwischen dem der Kathode und dem der Anode bzw. darüber hinaus, so erhält man die sogenannten Dynatron-Kennlinien. Aus diesen läßt sich zwar nicht quantitativ die Größe der SE.-Ausbeute<sup>2)</sup> bestimmen, doch geben sie

eine gute Übersicht über die auftretenden Erscheinungen und besitzen außerdem den Vorzug einfacher vakuumtechnischer Handhabung beim

1) Naturwiss. 4. S. 60. 1938; Fernsehen u. Tonfilm 1. S. 4. 1938.

2) Zur Definition der „SE.-Ausbeute“ vgl. den zusammenfassenden Bericht d. Verfs. Phys. Ztschr. 35. S. 202–224. 1937 (im folgenden kurz als „Z“ zitiert), speziell S. 206.

Ausglühen mit Hochfrequenz, beim Ausheizen usw. (über quantitative Messungen vgl. Abschnitt 2 und 4).

Nach Entgasung der Röhre und ihrer Innenteile wurde Be schrittweise aufgedampft und die Kennlinie nach jedem Aufdampfvorgang gemessen (Abb. 2). Mit wachsender Dicke der Aufdampfschicht hebt sich die Kennlinie in ihrem mittleren Teil zu immer höheren

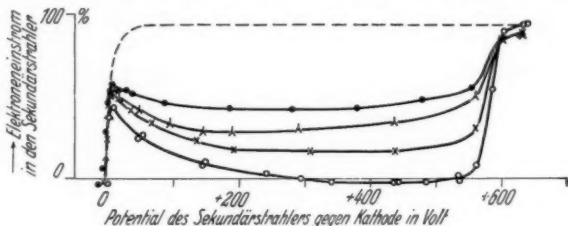


Abb. 2. Sekundärstrahler-Kennlinien an der Röhre nach Abb. 1 bei steigender Dicke der Be-Aufdampfschicht.

- Silberbelag; × kaum sichtbare Schicht; △ braune Schicht;  
● schwarzbraune, z. T. glänzende Schicht

Werten und erreicht schließlich eine Endlage, in welcher der wirkliche P.-Einstrom [gegeben etwa durch die gestrichelte Linie<sup>1)</sup>] nur noch um etwa 50% infolge von SE. erniedrigt ist. Die Ausbeute einer genügend dicken Aufdampfschicht liegt also ungefähr bei 0,5.

## 2. Versuche an kompakten Berylliumplatten

Die im vorigen Abschnitt festgestellte, sehr kleine Ausbeute an Be-Aufdampfschichten war zunächst nicht recht erklärlich<sup>2)</sup>, da ja nach den Messungen von Copeland<sup>3)</sup> das Be zu den Metallen mit der größten bisher bekannten SE.-Ausbeute gehören sollte. Daher wurden zunächst mit einer Anordnung ähnlich der in Abb. 6 wiedergegebenen an kompakten Be-Scheiben die Ergebnisse von Copeland nachgeprüft und, wie Abb. 3 zeigt, im großen und ganzen bestätigt; jedenfalls zeigen kompakte Be-Schichten Ausbeuten, die etwa 10mal höher liegen als die Ausbeuten der im Vakuum aufgedampften Be-Schichten. Den Grund für diese Diskrepanz wird man zunächst darin suchen, daß die kompakte Be-Scheibe an der Luft nach der Bearbeitung der Oberfläche wieder oxydiert, während die im Vakuum

1) Vgl. „Z“ S. 209, Fußnote 2 und auch Myers, Proc. Soc. Soc. 49. S. 264. 1937.

2) Die Veröffentlichung dieses bereits im April 1937 vorliegenden Resultats wurde daher bis zur weiteren Klarstellung der Gründe aufgeschoben.

3) P. L. Copeland, Physic. Rev. 46. S. 167. 1934.

hergestellten Be-Schichten mit Sauerstoff nicht in Berührung kommen, so daß also der Sauerstoff die von Copeland gemessene hohe Ausbeute des vermeintlich reinen Be bewirkt. Doch war diese Annahme schwer mit in weiteren Versuchen gefundenen experimentellen Tatsachen zu vereinigen: eine im Vakuum hergestellte Be-Aufdampfschicht, die 2—3 Tage an der Luft liegen gelassen und danach wieder im Vakuum auf ihre SE. untersucht wurde, zeigte unmittelbar nach dem Einbringen ins Vakuum (unausgeheizt) eine Ausbeute von etwa 2<sup>1)</sup>,

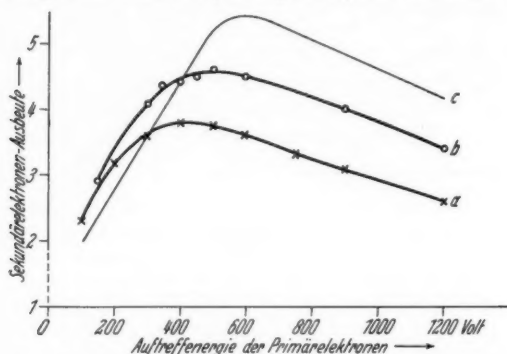


Abb. 3. Ausbeutekurven an kompakten Berylliumplatten.  
a abgeschliffen und ausgeheizt bei 400° C; b poliert und ausgeglüht;  
c nach Copeland

und nach längerem Ausheizen (8 Stunden bei 360° C) nur noch etwas mehr als 1 S/P. Im Gegensatz dazu wurde an einer kompakten Be-Platte, wenn sie einmal unmittelbar nach dem Abschleifen der Oberfläche ins Vakuum gebracht wurde und ein andermal nach dem Abschleifen noch einige Tage an Luft liegen blieb, in beiden Fällen die gleiche hohe Ausbeute (4—5) gemessen. Wollte man also die Oxydierung für die hohe Ausbeute an den kompakten Schichten verantwortlich machen, so müßte die Oxydierung einer kompakten Be-Platte viel schneller vor sich gehen als die einer Aufdampfschicht, nach bisheriger chemischer Kenntnis<sup>2)</sup> ist es aber gerade umgekehrt: Beryllium in kristalliner Form läßt sich viel schwerer oxydieren als in feinverteilter Form.

### 3. Versuche an oxydierten Beryllium-Aufdampfschichten

Um die im vorigen Abschnitt beschriebenen Diskrepanzen aufzuklären, und besonders, um die Rolle des Sauerstoffs für die SE.-Aus-

1) Eine gasbeladene Metallschicht zeigt im allgemeinen einen Ausbeutewert von der Größenordnung 2, vgl. z. B. „Z“ S. 207.

2) Vgl. z. B. Gmelin's, Handb. d. anorg. Chemie, Teil 26, speziell S. 68 unten.



beute von Be-Schichten festzustellen, wurden in weiteren Versuchen Be-Aufdampfschichten unter verschiedenen äußeren Bedingungen oxydiert und die zugehörigen Ausbeuten gemessen.

Die Oxydierung in einer Sauerstoff-Glimmentladung, wie sie bei der Silberunterlage von Alkaliphotoschichten üblich ist, ergibt, unabhängig von der Dauer und Stärke der Oxydierung, durchweg einen maximalen Ausbeutewert von 2,0 — 2,2, d. h. eine erheblich vergrößerte Ausbeute gegenüber der im Vakuum aufgedampften Schicht, aber doch einen Ausbeutehöchstwert, der nur halb so groß ist, wie die Höchstaussbeuten an kompakten Schichten (4—5). Nachträgliche Erwärmung solcher durch Glimmentladung oxydierter Schichten (z. B. 6 Stunden Ausheizung bei 350 — 450° C) erhöhte die SE-Ausbeute noch etwas bis auf maximal 2,5. In jedem Falle

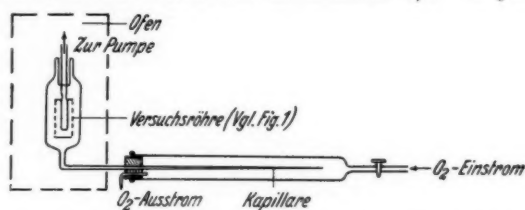


Abb. 4. Versuchsröhre mit regulierbarem Sauerstoffdruck bei strömendem Gas

bleibt also die durch Gasentladung oxydierte Schicht in ihrer Ausbeute erheblich hinter den Eigenschaften der kompakten Schicht zurück.

Die Oxydierung durch Erwärmung der Be-Aufdampfschicht in Sauerstoff führt im Gegensatz zum vorigen zu den Höchstaussbeuten von 4—5, wie sie an kompakten Schichten auftreten. Es wurde hierbei mit der in Abb. 4 skizzierten Anordnung die Abhängigkeit vom Sauerstoffdruck genauer untersucht. An die eigentliche Versuchsröhre war eine sehr fein ausgezogene Kapillare angeschmolzen; das Ende dieser Kapillare konnte je nach Bedarf durch Abschmelzen verschlossen oder durch Abschneiden geöffnet werden und ragte in eine Röhre hinein, durch die Sauerstoff aus einer Bombe etwa unter Atmosphärendruck hindurchströmte. Der auf diese Weise in die Röhre gelangende Sauerstoff wurde dauernd abgepumpt. Dadurch stellt sich ein Gleichgewichtsdruck von strömendem Sauerstoff in der Röhre ein, der von Zeit zu Zeit durch Abschneiden eines weiteren Kapillarenstücks vergrößert werden kann. Der Meßvorgang war der folgende: Es wurde bei 350° C Ofentemperatur die Kapillare geöffnet und der sich einstellende Gleichgewichtsdruck direkt an der Versuchsröhre gemessen. Eine Stunde nach dem Öffnen der Kapillare wurde

diese durch Abschmelzen wieder verschlossen und die Röhre eine Stunde lang weiter ausgeheizt, dann der Ofen abgestellt und nach dem Abkühlen die Dynatron-Kennlinie aufgenommen; dieser Versuch wurde für verschiedene Kapillarenlängen, d. h.  $O_2$ -Drucke, wiederholt. Aus jeder der dabei erhaltenen Dynatron-Kennlinien wurde der jeweilige Höchstwert der Ausbeute in der in Abb. 5a wiedergegebenen Weise bestimmt. In Abb. 5 ist dieser Höchstwert über dem zugehörigen

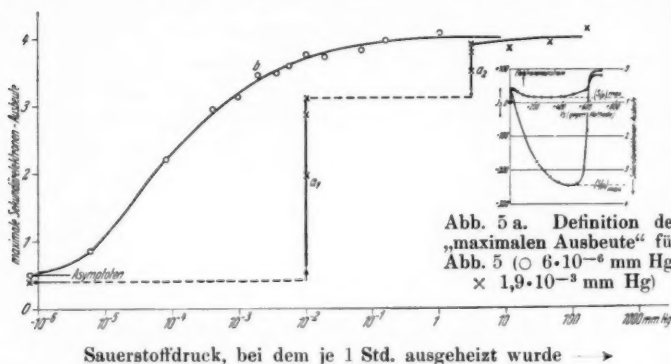


Abb. 5. Die „Aktivierung“ einer Be-Aufdampfschicht durch Erwärmung in Sauerstoff als Funktion des Sauerstoffdruckes

Sauerstoffdruck aufgetragen; bei konstantem Druck (Linie  $a_1$  und  $a_2$ ) nimmt die Ausbeute um so langsamer zu, je näher die untersuchte Schicht bereits dem erreichbaren Höchstwert ist, bei verschiedenen Drucken (Linie  $b$ ) nimmt die Geschwindigkeit, mit der der Höchstwert erreicht wird, mit steigendem Druck zu. Schon bei Drucken von  $5 \cdot 10^{-6}$  mm ist aber nach einer Stunde Ausheizen bei  $350^\circ C$  eine merkbare Zunahme der Ausbeute festzustellen. In allen Fällen strebt die Ausbeute der so behandelten Schichten einem Höchstwert von etwa 4 zu<sup>1)</sup>.

Nach dem Ausfall dieser Versuche muß man den Schluß ziehen, daß durch Oxydierung im kalten Zustand sich die Ausbeute-Höchstwerte der kompakten Schicht nicht erreichen lassen, sondern daß dazu gleichzeitig eine Erwärmung der Be-Aufdampfschicht notwendig ist. Das führt offenbar zu der Frage, ob auch eine Ausheizung der Schicht allein, d. h. möglichst ohne Mitwirkung von Sauerstoff, irgendeinen

1) Man beachte die Definition des Höchstwertes nach Abb. 5a! Der z. B. mit den Werten der Abb. 3 vergleichbare wahre SE.-Höchstwert dürfte noch etwas höher liegen.

Einfluß auf die SE. der Be-Aufdampfschicht ausübt<sup>1)</sup>. Im guten Vakuum war aber auch nach mehrstündiger Ausheizung bei 400° C noch keine Veränderung der Ausbeute festzustellen. Erst bei Erwärmung der Be-Aufdampfschicht auf eine merklich höhere Temperatur wurde ein Einfluß der Erwärmung auf den Ausbeutewert bemerkbar, wie die im nächsten Abschnitt besprochenen Versuche zeigen werden.

#### 4. Erwärmung von Be-Aufdampfschichten im Vakuum auf hohe Temperatur

Mit der bisher benutzten Dreielektrodenröhre nach Abb. 1, bei der der Sekundärstrahler durch einen metallischen Niederschlag auf der Röhrenwand gebildet wurde, ließ sich der Sekundärstrahler naturgemäß nicht über etwa 400° C erwärmen. Um ihn auf höhere Temperatur bringen zu können, wurde eine andere Anordnung

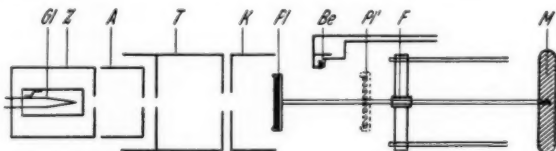


Abb. 6. Anordnung zur Messung der Sekundäremissionsausbeute von im Vakuum geheizten Be-Aufdampfschichten

gewählt, die in Abb. 6 schematisch wiedergegeben ist. Die P. vom Glühdraht Gl werden auf die Anode A hin beschleunigt, der Zwischenzylinder Z liegt auf einem geeigneten mittleren Potential zwischen dem des Glühdrahtes und dem der Anode. Sie durchlaufen einen Blendenzylinder T, der gegenüber der Anode auf geeignetem negativen Potential liegt und dadurch den Entstehungsraum der P. von dem eigentlichen Meßraum trennt. Schließlich treten sie in den Käfig K ein und treffen auf die sekundärstrahlende Platte Pl auf. Der Käfig K, der von P. nicht direkt getroffen werden kann, wird gegen Pl auf z. B. 30 Volt positiv oder negativ aufgeladen. Bei positivem Käfigpotential werden die S., die an der Platte ausgelöst sind, nach K gezogen, bei negativem Käfigpotential werden alle S. auf der Platte zurückgehalten; im letzteren Falle wird also durch den von der Platte abfließenden Strom unmittelbar die Primärintensität  $J_p$  festgestellt, im ersteren Fall die Differenz von Primär- und Sekundärintensität  $J_p - J_s$  gemessen. Durch Kombination

1) Solch ein Einfluß kann natürlich nicht ein primärer, reversibler Temperatureinfluß sein (vgl. „Z“ S. 209), sondern es muß sich um bleibende Veränderungen in der Schicht handeln.

beider Messungen läßt sich die gesuchte Ausbeute  $J_s/J_p$  bestimmen. Die Platte konnte mit Hilfe eines Magneten und des Eisennebels  $M$  bewegt werden. In der gestrichelt gezeichneten Stellung  $Pl'$  in

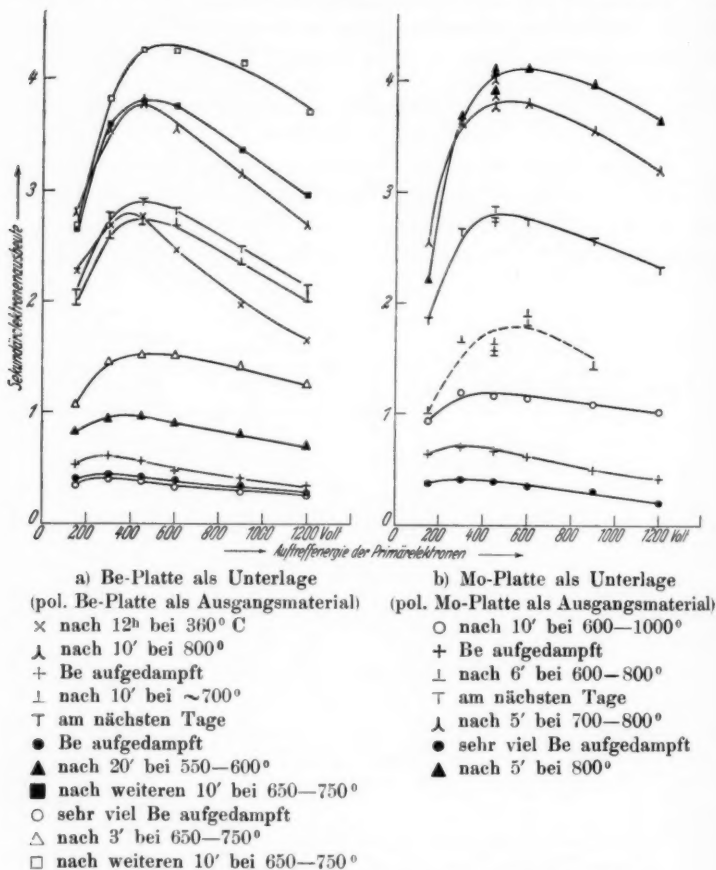


Abb. 7. Veränderung der Ausbeute an Be-Aufdampfschichten bei Erwärmung im Vakuum

Abb. 6 kann die Platte einerseits von der mit Be gefüllten Wolframwendel aus mit Be bedampft und andererseits mit einer Hochfrequenzspule auf beliebige Temperaturen erhitzt werden<sup>1)</sup>. Die Einzelteile

1) Die Erwärmung war dabei zeitlich nicht ganz konstant; die in den Erklärungen zu Abb. 7 a, b gemachten Temperaturangaben sind als Mittelwerte aus der Helligkeit und Farbe geschätzt.

der Röhre wurden vor und nach dem Zusammensetzen gut ausgeglüht und die ganze Röhre längere Zeit bei  $400^{\circ}\text{C}$  ausgeheizt. Als Material für den Sekundärstrahler wurde eine kompakte Be-Scheibe, und in weiteren Versuchen ein Molybdänblech verwendet. Die Einzelheiten des Versuches und die Ergebnisse sind in den Abb. 7a, b und den zugehörigen Zeichenerklärungen niedergelegt. Die Höchstaussbeute an einer genügend dicken, nicht wärmebehandelten Be-Aufdampfschicht ergibt sich zu  $0,4_2$ . Bis zu einer Erwärmung von etwa  $600^{\circ}\text{C}$  ändert sich die Ausbeute der Aufdampfschicht nur wenig, bei Erwärmung über etwa  $650^{\circ}$  steigt sie rasch bis zu den an der kompakten Schicht gemessenen Werten an. Der ganze Versuch läßt sich beliebig oft hintereinander wiederholen. Für Molybdän als Unterlagemetall ergibt sich das gleiche Bild wie für Be als Unterlagemetall, die erreichten Höchstaussbeuten sind von gleicher Größe. Bemerkenswert ist vielleicht die nachträgliche Erhöhung der Ausbeute von einem Tag zum anderen an der auf Be aufgedampften Be-Schicht ohne irgendwelche Änderung der äußeren Bedingungen ( $\perp \rightarrow \top$ ) sowie die Verschiebung der Maximumlage bei Vergrößerung der Ausbeute. Der Ausfall dieser Versuche zeigt, daß tatsächlich durch Erwärmung in gutem Vakuum eine starke Änderung der Ausbeute an der Be-Aufdampfschicht hervorgerufen werden kann.

Wegen der Wichtigkeit dieses Resultats wurde es noch durch einen Kontrollversuch unter extremen Vakuumbedingungen gesichert. Gleichzeitig wurde auch die Temperaturabhängigkeit dieser Erscheinung genauer studiert, als es unter den vorliegenden Versuchsbedingungen möglich war. Da es hierbei weniger auf die quantitative Messung der Größe der Ausbeute als vielmehr auf den Nachweis ankam, daß überhaupt bei Erwärmung der Be-Aufdampfschicht auf bestimmte Temperaturen eine erhebliche Erhöhung der Ausbeute eintritt, wurde der Einfachheit halber wieder auf eine Dreielektrodenröhre besonderer Bauart zurückgegriffen, deren Einzelheiten aus Abb. 8 zu ersehen sind (Röhre A). Wesentlich ist vor allem, daß der Sekundärstrahler, ein Wolframblech von 0,2 mm Dicke, von der Rückseite durch Elektronenbeschöpfung von einer Glühwendel her ausgeheizt und seine Temperatur mit einem Pyrometer während des Versuches gemessen werden kann. Das Be wird von oben her aus der Wolframwendel, die seitlich vom Elektronenstrahlengang liegt, auf den Sekundärstrahler (Wolframblech) aufgedampft. An den gleichen Pumpstutzen ist eine weitere Röhre gehängt, die als Ionisationsmanometer dient und nebenbei zu weiter unten beschriebenen Versuchen ähnlicher Art benutzt werden soll. Ferner ist noch ein Absorptionskohle-Gefäß mitangeschmolzen. Alle Röhrenteile bestehen aus Hartglas.

Zwecks gründlicher Entgasung wurden tagelang abwechselnd die Innenteile der Röhren sowie die Absorptionskohle geglüht und alle Teile im Ofen auf  $420^{\circ}\text{C}$  ausgeheizt. Die Röhre wurde dann

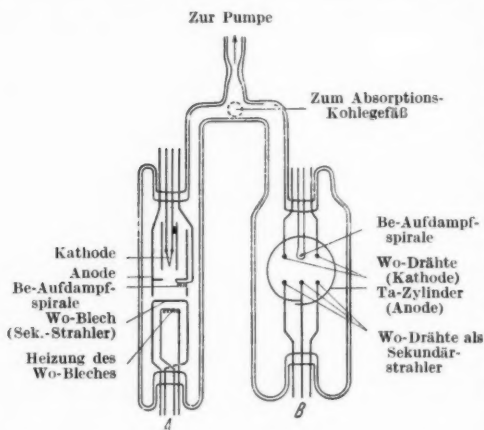


Abb. 8. Dreielektrodenröhren zur Bestimmung der SE.-Ausbeute von im Hochvakuum erhitzten Be-Aufdampfschichten

abgeschmolzen, die Absorptionskohle in flüssige Luft getaucht und der Entgasungsprozeß unter Einfluß des Glühens der verschiedenen Glühdrähte und Wolframwendeln so lange fortgesetzt, bis im Ionisationsmanometer der Vakuumfaktor <sup>1)</sup> beim Glühen des Sekundärstrahlers auf  $1500^{\circ}\text{C}$ , beim Verdampfen von Be und beim Glühen der übrigen Teile der Röhre dauernd kleiner blieb als  $10^{-6}$ . Es wurde

dann so lange Be aufgedampft, bis die Charakteristik des Sekundärstrahlers (vgl. Abb. 9) bei weiterer Aufdampfung sich nicht mehr veränderte, also eine genügend dicke Be-Schicht auf das Wolframblech aufgebracht war. Die zugehörige Kennlinie (Kurve I) wurde dann gemessen (●—●). Danach wurde das Wolframblech durch Elektronenbeschießung von rückwärts 10 Minuten lang auf  $600^{\circ}\text{C}$  erwärmt, erkalten gelassen und wiederum die Kennlinie gemessen (× ×): Es hatte sich an der Sekundäremission der Be-Aufdampfschicht nichts verändert. Nach 10 Minuten Erhitzen auf  $650^{\circ}\text{C}$  (△—△) und entsprechend auf  $700^{\circ}\text{C}$  (□—□) war immer noch keine merkliche Änderung der SE.-Eigenschaften der Be-Aufdampfschicht festzustellen. Dagegen hatte eine 10 Minuten lange Erhitzung auf  $750^{\circ}\text{C}$  eine merkliche Erhöhung der SE. zur Folge, wie der deutlich abweichende Kurvenverlauf in Abb. 9 zeigt. Bei weiterem Erhitzen erhöhte sich die Ausbeute der Schicht weiter (vgl. die fallenden Kennlinien für  $800$ ,  $850$  und  $900^{\circ}\text{C}$ ).

1) Definition vgl. bei H. Barkhausen, Elektronenröhren Bd. I (Einführung) S. 11.

Ein zweiter Kontrollversuch wurde in anderer Form mit der bisher als Ionisationsmanometer verwendeten, in Abb. 9 rechts skizzierten Röhre B durchgeführt, also ebenfalls unter den weiter

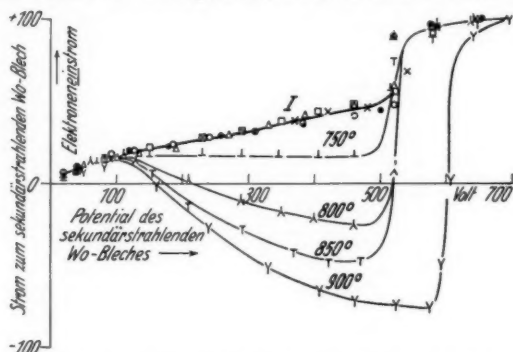


Abb. 9. Kennlinien des sekundärstrahlenden Wo-Blechs (vgl. Röhre A in Abb. 8) nach Erhitzung auf verschiedene Temperaturen.

Anodenspannung 525 Volt mit Ausnahme der Kurve für 900°  
(Anodenspannung 600 Volt)

oben beschriebenen extremen Vakuumbedingungen. Nach kräftiger Berylliumverdampfung aus der Wolframwendel zeigt jeder der drei

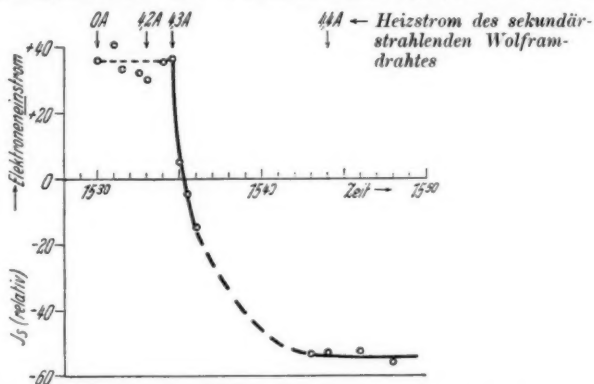


Abb. 10. Zeitliche Änderung der Sekundäremission eines mit Be bedampften Wolframdrahtes bei Erwärmung im Hochvakuum.  
(Glühstromstärke des Wolframdrahtes als Parameter)

unteren, als Sekundärstrahler verwendeten Wolframdrähte (Tantalzylinder als Anode geschaltet) zunächst einen Elektroneneinstrom vom Glühdraht her, wie es nach der unter 1 liegenden Ausbeute (vgl. Abb. 7) der frisch aufgedampften Be-Schicht sein muß. Der



Wolframdraht wird nun mittels Stromdurchgang langsam erwärmt<sup>1)</sup> und dabei der Elektronenstrom zum Wolframdraht dauernd gemessen. Das Ergebnis dieses Versuches ist in Abb. 10 dargestellt. Der Elektroneneinstrom ist zeitlich konstant<sup>2)</sup> bis zu einer Glühdraht-Heizstromstärke von 4,3 A; hier setzt plötzlich der oben beschriebene Effekt verstärkter SE. ein. Der Elektroneneinstrom zum Wolframdraht geht, ohne irgendeine weitere Änderung äußerer Bedingungen, innerhalb von etwa 5 Minuten zuerst schnell, dann langsamer in einen Elektronenausstrom aus dem Wolframdraht über ( $S_e/P > 1$ ); weitere Erhöhung des Heizstromes auf 4,4 A hat nach Erreichung des konstanten Endwertes keinen Einfluß mehr. Der Versuch wurde mehrfach mit gleichem Ergebnis wiederholt.

Kurz erwähnt seien hier noch Versuche mit einer Röhre ähnlicher Art an Drähten aus verschiedenem Metall als Unterlage für die Be-Aufdampfschicht (Wo, Mo, Ta, Ni). In allen Fällen wurde der starke Einsatz der Ausbeutezunahme bei Erwärmung auf etwa die gleiche Temperatur festgestellt. Es scheinen aber gewisse Unterschiede zwischen den verschiedenen Materialien zu bestehen, und zwar sowohl bezüglich der Größe der erhaltenen Höchstausbeuten als auch bezüglich der Schnelligkeit, mit der der Anfangszustand in den Endzustand übergeht. Hinsichtlich des letztgenannten Gesichtspunktes scheinen sich die Unterlagemetalle in der Reihenfolge Ni, Mo, Wo zu ordnen, hinsichtlich des erstgenannten scheinen zwischen Ni und Mo einerseits und Wo und Ta andererseits gewisse Unterschiede zu bestehen. Doch waren diese Versuche mehr orientierender Art und ließen keine quantitative Angabe über die Ausbeute zu.

##### 5. Folgerungen aus den experimentellen Ergebnissen

Aus den Versuchsergebnissen der Abschnitte 1—4 können wir den Schluß ziehen, daß in der aufgedampften Be-Schicht infolge der Erwärmung Veränderungen vor sich gehen, die ihrerseits eine Erhöhung der SE. zur Folge haben. Da es sich um einen alleinigen Einfluß einer Oxydierung nicht handeln kann — die Erhöhung infolge Erwärmung tritt ja einerseits auch bei besten Vakuumbedingungen auf und andererseits führt die gewöhnliche Oxydierung in einer Sauerstoffentladung nicht zum gewünschten Erfolg — muß man annehmen, daß es sich um strukturelle Umlagerungen in der Schicht handelt, z. B. Kristallisationserscheinungen, jedenfalls um Vorgänge, die mit der Anordnung der Atome in der Be-Schicht zusammenhängen.

1) In Abb. 9 ist nur eine der für jeden Wolframdraht vorhandenen zwei Zuführungen angedeutet.

2) Die Streuung der Punkte im oberen horizontalen Kurvenast ist sekundärer Natur (Schwankungen im Galvanometerkreis).

Dieser Schluß stützt sich u. a. besonders auf die Plötzlichkeit, mit der die Vergrößerung der SE. bei Erwärmung im Hochvakuum einsetzt und dann auch darauf, daß das Mikroskopbild einer solchen Schicht vor und nach diesem „Aktivierungsvorgang“ merkbare Verschiedenheiten aufweist: Die unbehandelte Aufdampfschicht zeigt auf glatter Unterlage etwa das Aussehen einer aufgeschlämmten Schicht aus so feinen Teilchen, daß sie bei 250facher Vergrößerung noch gleichmäßig erscheint. In Dunkelfeldbeleuchtung ist diese Schicht völlig schwarz (Abb. 11a). Nach Erwärmung in Sauerstoff dagegen zeigt sie unter den gleichen Aufnahmebedingungen eine große Zahl kleiner heller Punkte, deren Deutung ungewiß bleibt, die aber darauf hinweisen, daß eine merkbare Veränderung mit der Schicht vor sich gegangen ist (Abb. 11b). Es wurde ferner das mit Be bedampfte Wolframblech (Sekundärstrahler in Röhre A der Abb. 8) mikroskopisch untersucht und dabei unter anderen eine netzartige Struktur gefunden, die in verschiedenstem Feinheitsgrad auftritt (Abb. 11c, d, e, Hellfeldbeleuchtung). Zum Vergleich ist noch das erste dieser drei Bilder in Dunkelfeldbeleuchtung wiedergegeben (Abb. 11f). Schließlich zeigt Abb. 11g die natürliche Rauigkeit einer von Beryllium freien Stelle des gleichen Wolframbleches.

Die SE. an einer Metallschicht scheint also nicht nur eine spezielle Eigenschaft des Metallatoms selbst zu sein, sondern wesentlich von der Anordnung der Metallatome abzuhängen. In diesem Sinne sind wohl auch frühere Ergebnisse von Farnsworth<sup>1)</sup> und Rao<sup>2)</sup> zu deuten. Nicht ohne weiteres gehören hierher elektronenoptische Abbildungen eines silizierten Eisenbleches mit Hilfe von Sekundärelektronen durch Knoll<sup>3)</sup>, weil, worauf Knoll selbst hinweist, die verschiedene Sekundäremission der verschiedenen Kristallitflächen in seinen Versuchen möglicherweise auch auf verschiedenartige Gasbeladung zurückzuführen ist.

Die Ursachen für den Einfluß der Atomanordnung auf die Ausbeute können zweierlei Art sein:

a) Die Zahl der im Metall in Freiheit gesetzten Sekundärelektronen kann sich ändern,

b) Die Absorption der Sekundärelektronen beim Durchgang durch das Metall zur Metalloberfläche hin kann sich ändern.

Über den Einfluß des Vorganges a) läßt sich zur Zeit kaum etwas aussagen, der Vorgang b), die Änderung der Absorptionsverhältnisse für die Sekundärelektronen, ist aber nach den Messungen von Katz<sup>4)</sup>

1) H. E. Farnsworth, *Physic. Rev.* **25**, S. 41. 1925.

2) S. R. Rao, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **128**, S. 57. 1930.

3) M. Knoll, *Phys. Ztschr.* **36**, S. 861. 1935.

4) H. Katz, *Ztschr. f. techn. Physik* **18**, S. 555. 1937.

sicher recht wesentlich. Nach Katz nimmt die Durchlässigkeit von Silberfolien für Elektronen von einigen Volt nach einer Wärme-



Abb. 11a. Frisch aufgedampfte Be-Schicht auf poliertem Silber als Unterlage (Dunkelfeldbeleuchtung, Vergrößerung 250 fach)

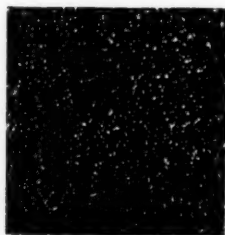


Abb. 11b. Durch Erwärmung in Sauerstoff „aktivierte“ Be-Aufdampfschicht

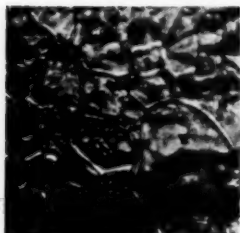


Abb. 11c. Im Vakuum auf ein gewalztes Wolframblech aufgedampfte und durch Glühen „aktivierte“ Be-Aufdampfschicht: Netzstruktur verschiedenen Feinheitsgrades an verschiedenen Stellen (Hellfeldbeleuchtung, Vergrößerung 500 fach)



Abb. 11d.

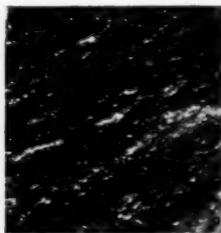


Abb. 11e.



Abb. 11f. Gleiche Aufnahme wie Abb. 11e in Dunkelfeldbeleuchtung (Vergrößerung 500 fach)



Abb. 11g. Von Beryllium freie Stelle des gleichen Wolframbleches in Hellfeldbeleuchtung

behandlung der Folien stark zu; in einigen Fällen betrug die Zunahme mehrere Zehnerpotenzen. Über Be-Folien liegen aus dieser Arbeit keine Angaben vor.

In diesem Zusammenhang sei noch auf eine Arbeit von Hass<sup>1)</sup> hingewiesen, der die Struktur dünner Metallaufdampfschichten (Ag, Sb) mit Hilfe von Elektronenbeugung untersucht hat. Wurden bei tiefen Temperaturen aufgedampfte Schichten dieser Metalle erwärmt, so war deutlich ein Anwachsen der Kristallitgröße an dem Schärferwerden der Interferenzringe zu beobachten, ohne daß allerdings in diesem Fall eine bestimmte Umwandlungstemperatur gefunden wurde, wie sie von Kramer<sup>2)</sup> für den Übergang vom „amorphen“ in den metallischen Zustand bei verschiedenen Metallen angegeben wurde. Eine kritische Umwandlungstemperatur in der Nähe von 700—800°C, wie sie zur Erklärung der in dieser Arbeit beschriebenen Versuche herangezogen werden müßte, ist für Be bisher nicht bekannt<sup>3)</sup>. Es ist aber möglich, daß auch die Art der Unterlage, auf die die Schicht aufgedampft wird, bei diesen Fragen eine Rolle spielt.

#### Zusammenfassung

Die Sekundäremission des Berylliums wurde unter weitgehender Variation der Versuchsbedingungen untersucht. Im Hochvakuum aufgedampfte Schichten ergeben eine sehr kleine Ausbeute (maximal 0,4%). Kompakte Beryllium-Platten zeigen eine etwa 10 mal so große Ausbeute (maximal 4–5). Oxydation der Vakuum-Aufdampfschichten in einer Sauerstoffglimmladung führt zu Höchstausbauten von 2–2,5. Oxydierung in einer Sauerstoffatmosphäre bei gleichzeitiger Erwärmung ergibt nach längerer Zeit (abhängig vom Sauerstoffdruck) Höchstausbauten von 4–5. Beim Glühen von Aufdampfschichten in möglichst gutem Vakuum tritt eine Erhöhung der Ausbeute ein, wenn eine bestimmte Temperatur erreicht wird, die im Bereich von 700—800°C liegt. Aus dem gesamten Material wird geschlossen, daß — jedenfalls beim Beryllium — die Oxydierung allein nicht zu den höchsten bei diesem Metall erreichbaren Ausbauten führt, sondern daß hierzu Vorgänge in der Schicht notwendig sind, die mit der Anordnung der Atome in der Schicht zusammenhängen.

1) G. Hass, Ann. d. Phys. [5] 31. S. 245. 1938.

2) J. Kramer, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 37. 1934.

3) Gmelins Handb. d. anorg. Chemie, Teil 26, S. 54.

Berlin-Reinickendorf, den 7. Juli 1938.

(Eingegangen 9. Juli 1938)

**Einige kritische Betrachtungen  
über die Integralgleichung des Skineffektes**

**Von Felix Lettowsky**

I. Zur Berechnung des Skineffektes in elektrischen Leitern wurde von verschiedenen Autoren, insbesondere von Ch. Manneback, F. Noether u. M. J. O. Strutt<sup>1)</sup> eine gewisse Integralgleichung herangezogen. Bedeutet  $i(x, y, z)$  die gesuchte Stromverteilung,  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten,  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz (die Bezeichnungen wurden mit Rücksicht auf die später zu besprechende Arbeit E. Rotheres gewählt) so lautet diese Integralgleichung mit  $\alpha^2 = -4\pi i\sigma\omega$

$$(1) \quad i(x, y, z) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \iiint_V \frac{i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \text{const.}$$

Im Falle zylindrischer Leiter, bei denen die Verteilung der Stromdichte von der Koordinate längs der Leiterachse  $z$  unabhängig wird, geht diese Gleichung über in

$$(2) \quad i(x, y) + \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_B \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} i(\xi, \eta) d\xi d\eta = C.$$

Strutt zeigt auch, daß man aus dieser Integralgleichung im Falle axialer Symmetrie leicht die bekannte Lösung

$$(3) \quad i(x, y) = K J_0(\alpha r) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

erhält. In seiner weiteren Arbeit<sup>2)</sup> wird diese Integralgleichung etwas verallgemeinert, indem in ihrem inhomogenen Teil statt der Konstanten eine Potentialfunktion eingeführt wird. Dabei wird von folgender Formulierung ausgegangen.

Vorgelegt sei irgendein zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld. In dieses Feld wird ein Leiter von irgendwelcher Gestalt hineingebracht. Gesucht ist das Feld innerhalb des Leiters und insbesondere die Energiedissipation im Leiter. Als „Skineffekt“ bezeichnet M. J. O. Strutt dann allgemein die Tatsache, daß das

1) Ch. Manneback, F. Noether u. M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. 86. S. 781. 1928.

2) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 777. 1931.

Feld nach Hereinbringen des Leiters anders aussieht als vorher. Die dieser Vorstellung entsprechende Integralgleichung lautet dann:

$$(1a) \quad i(x, y, z) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \iiint_V \frac{i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} + i\omega \sigma \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z),$$

wobei  $\mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z)$  als vorgegebene Vektorfunktion aufzufassen ist, die das Feld darstellt, in das man sich den Leiter hineingebracht denkt. Diese Gleichung kann wegen

$$(4) \quad i(x, y, z) = -i\omega \sigma \mathfrak{U}$$

auch geschrieben werden,

$$(1c) \quad \mathfrak{U}(x, y, z) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathfrak{U}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} + \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z),$$

so daß nach Strutt für  $\sigma = 0$  (somit  $\alpha^2 = 0$ )  $\mathfrak{U}(x, y, z) = \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z)$  ist, im Einklang mit der Vorstellung, daß eben  $\mathfrak{U}(x, y, z)$  das Feld darstellt, das aus dem durch  $\mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z)$  dargestellten entsteht, wenn in dieses der Leiter hineingebracht wird. Strutt untersucht nun ganz allgemein die Frequenzabhängigkeit von  $i(x, y, z)$ , indem er die Lösung der Integralgleichung nach der allgemeinen Theorie der inhomogenen linearen Integralgleichungen hinschreibt. Für kleine Frequenzen genügt es, die hinreichend gut konvergierende Neumannsche Reihe zu benützen. Es ist also

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} i(x, y, z) &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z) \\ &+ \frac{\alpha^4}{(4\pi)^2} 2 \iiint_V \frac{\mathfrak{U}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Strutt unterscheidet dabei zwei Fälle, die er kurz als „elektrischen“ und „magnetischen“ Fall bezeichnet, je nachdem ob nach Hereinbringen des Leiters in das durch  $\mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z)$  gegebene Feld, das Linienintegral der elektrischen oder das Linienintegral der magnetischen Feldstärke zwischen zwei gegebenen Punkten konstant gehalten wird, wobei im ersten Fall nach Strutt ( $E$  Linienintegral der elektrischen Feldstärke)

$$(6) \quad \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z) = \frac{c_1}{\omega} E,$$

während im zweiten Fall

$$(6a) \quad \mathfrak{U}^{(0)}(x, y, z) = c_2 M$$

( $M$  Linienintegrale der magnetischen Feldstärke) ist und  $c_1$  bzw.  $c_2$  die Frequenz nicht enthalten.

Weiterhin sei auf die Arbeit E. Rothes<sup>1)</sup> hingewiesen, in der der Autor eine von ihm als „strenge Integralgleichung des Skineffektes“ bezeichnete Integralgleichung herleitet, wobei im Gegensatz zu den meisten sonst üblichen Darstellungen der Verschiebungsstrom nicht vernachlässigt wird. Mit Hilfe dieser Integralgleichung beweist E. Rothe unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, daß die Stromdichte am Leiterrande ein bestimmtes, durch einen Exponentialausdruck gekennzeichnetes Verhalten zeigt, das er als „Skineffekt“ bezeichnet<sup>2)</sup>. Dabei vermerkt E. Rothe<sup>3)</sup> folgenden Widerspruch: Die von ihm hergeleitete Integralgleichung geht bei nachträglicher Vernachlässigung des Verschiebungsstromes *nicht* vollkommen in die vorerwähnte, von Manneback, Strutt usw. verwendete Integralgleichung über. Rothe gibt auch (übrigens nicht stichhaltige) Gründe an, die dieses unerwartete Verhalten erläutern sollen. Wie aus diesen Bemerkungen hervorgeht, gehen die Auffassungen über das Wesen des Skineffektes in dem bisher vorliegenden Schrifttum auseinander. Hier durch einige kritische Bemerkungen Klarheit zu schaffen, ist der Zweck dieser Zeilen. Dabei genügt es, das einfache Beispiel eines unendlich ausgedehnten Leiters mit kreiszylindrischem Querschnitt heranzuziehen, bei dem alle in Frage kommenden Größen explizit hingeschrieben werden können, um folgendes einzusehen:

1. Die von Strutt dargelegte Formulierung des Skineffektproblems enthält Unklarheiten. Im wesentlichen sind sie dadurch bedingt, daß aus der Struttschen Arbeit nicht klar zu ersehen ist, was er rein begrifflich meint, wenn er von einem „Hineinbringen“ eines Leiters in ein vorgegebenes Wechselfeld spricht. Seine Formulierung verleitet zu der Anschauung, daß die Größe  $\mathfrak{M}^{(0)}$  nicht von den Dimensionen und von der Leitfähigkeit des Leiters abhängt, der in das durch  $\mathfrak{M}^{(0)}$  „vorgegebene“ Feld „hineingebracht“ wird und damit auch zu unrichtigen Anschauungen über die Frequenzabhängigkeit von  $\mathfrak{M}^{(0)}$ .

2. Die Struttsche Herleitung der Frequenzabhängigkeit des Skineffektes bei kleinen Frequenzen beruht auf unrichtigen Voraussetzungen hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit von  $\mathfrak{M}^{(0)}$ . Sie ist daher nicht stichhaltig.

1) E. Rothe, Journ. f. reine u. angewandte Math. **170**. S. 218. 1934.

2) Gewöhnlich spricht man von „Skineffekt“ auch dann schon, wenn es sich überhaupt um die Erscheinung handelt, daß die Stromdichte gegen den Leiterrand hin nach irgendeinem Gesetz zunimmt.

3) E. Rothe, a. a. O. S. 212, Fußnote.



3. Die Verwendung der Ausstrahlungsbedingung bei E. Rothe bedingt eine Einschränkung für die Funktion  $A^{(0)}(P)$ , die von E. Rothe, ähnlich wie  $\mathfrak{A}^{(0)}(x, y, z)$  bei Strutt, als *vorgegebene* Funktion betrachtet wird. Es wird im Folgenden gezeigt, daß eben wegen der Ausstrahlungsbedingung  $A^{(0)}(P)$  keinesfalls beliebig gewählt werden kann.

4. Der von E. Rothe vermerkte Widerspruch besteht nicht zu Recht.  $A^{(0)}(P)$  ist bei E. Rothe anders bestimmt als der entsprechende Ausdruck bei Strutt.

5. Gegen die Rotheschens Ansätze sind vom physikalischen Standpunkt aus grundsätzliche Einwände zu erheben. Es ist natürlich nur eine Frage zweckmäßiger Nomenklatur, welche elektromagnetischen Vorgänge unter dem Namen „Skineffekt“ zusammenfassend betrachtet werden sollen. Es ist beispielsweise kaum angingig, jede Art von Beugungsvorgängen, bei denen innerhalb der beugenden Leiter skineffektähnliche Erscheinungen auftreten, so zu benennen. Jedenfalls wird man von einer mathematischen Formulierung des Skineffektproblems unbedingt verlangen müssen, daß sie die Vorgänge richtig darstellt, die man normalerweise als Skineffekt bezeichnet, d. h. man wird u. a. verlangen müssen, daß sich aus den Ansätzen das elektromagnetische Feld bei der Energieübertragung längs einer Leitung berechnen läßt.

Die Rotheschens Ansätze ergeben aber nur im Falle einer Spezialisierung für den quasistationären Fall, der auch durch die Annahme  $\varepsilon = 0$  gekennzeichnet werden kann und auch da nur für das magnetische Feld das Richtige. Das elektrische Feld wird dann durch diese Ansätze nur im Leiter selbst richtig erfaßt; im Außenraum wird es durch die Annahme, daß dort das skalare Potential  $\Phi \equiv 0$  sein soll, gänzlich entstellt wiedergegeben, was allerdings für den Skineffekt selbst von untergeordneter Bedeutung ist.

Zur Begründung dieser fünf Behauptungen sei Folgendes angeführt: Strutt stellt wohl die S. 300 zitierte Formulierung an die Spitze seiner Ausführungen über den „Skineffekt“ (in der unter 2. genannten Arbeit). Er leitet aber die Integralgleichung ab, ohne dabei näher zu sagen, wie man sich eigentlich das „Hineinbringen“ des Leiters in das Feld vorstellen soll bzw. wodurch das vor dem Hineinbringen des Leiters vorhandene Feld vorgegeben sein soll. Erst *nachträglich* und zwar bei den Anwendungen, wird von dem „elektrischen“ bzw. „magnetischen“ Fall gesprochen.

Im Grunde genommen wird daher die eingangs erwähnte Formulierung zur Herleitung der Integralgleichung gar nicht verwendet. Es handelt sich also letzten Endes nur um eine besondere Inter-

pretation der Integralgleichung. Sobald man aber von einem Hineinbringen eines Leiters in ein vorgegebenes Feld spricht, wird man doch wohl stillschweigend annehmen müssen, daß das *vorgegebene* Feld nicht von der Leitfähigkeit und den Leiterdimensionen des Leiters abhängt, der erst hineingebracht werden soll. Sonst wäre ja in dieser Hinsicht von dem vorgegebenen  $\mathfrak{A}^{(0)}$  genau so wenig bekannt, wie von dem gesuchten  $\mathfrak{A}$  und die Benennung „vorgegebenes Feld“ wäre unangebracht und vor allem irreführend<sup>1)</sup>. In dem von Strutt erwähnten elektrischen bzw. magnetischen Fall hängt aber  $\mathfrak{A}^{(0)}$  von den genannten Größen in gleicher Weise ab wie  $\mathfrak{A}$  selbst, wie das schon an dem Beispiel des Leiters mit kreiszylindrischem Querschnitt in augenfälligster Weise zum Ausdruck kommt. Um demnach die Struttsche Formulierung des Begriffes Skineffekt als sinnvolle Interpretation seiner Integralgleichung zu erweisen, wäre in jedem einzelnen Fall in erster Linie nachzuweisen, daß  $\mathfrak{A}^{(0)}$  von den genannten Größen nicht abhängt. Sonst kann diese Interpretation leicht zu Trugschlüssen hinsichtlich bei Frequenzabhängigkeit von  $\mathfrak{A}^{(0)}$  führen. In dem von Strutt ausführlich besprochenen elektrischen bzw. magnetischen Fall hängt nämlich  $\mathfrak{A}^{(0)}$  *auch* von der *Frequenz* in ähnlicher Form ab wie  $\mathfrak{A}$  selbst<sup>2)</sup>, daher ist die Struttsche Herleitung der Frequenzabhängigkeit des Skineffekts unrichtig. Noch etwas genauer kann man sagen: Bei dem von Strutt als Skineffekt formulierten Problem, das die gewöhnlich unter diesem Namen zusammengefaßten Erscheinungen miteinschließt, handelt es sich offenbar um den Zusammenhang zweier Feldverteilungen, die durch  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{A}^{(0)}$  dargestellt werden, in einem begrenzten (zwei oder dreidimensionalen) Gebiet, innerhalb dessen im ersten Fall der Wert der Größe  $\sigma$  von dem des Außenraumes  $\sigma = 0$  verschieden ist, im zweiten Fall mit ihm übereinstimmt, falls gewisse, für den Wert von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{A}^{(0)}$  maßgebende Größen, z. B.  $E$  oder  $M$ , in beiden Fällen gleich bleiben. Die Vorstellung vom „Hineinbringen“ des Leiters in das Feld  $\mathfrak{A}^{(0)}$  ist, wie erwähnt, nur dann sinnvoll, wenn unter den gegebenen Voraussetzungen (z. B.  $E = \text{const}$  oder  $M = \text{const}$ ) die Bedingung

(7)

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)}$$

1) Sobald man aus anderen Überlegungen etwas über den Charakter der Funktion  $\mathfrak{A}^{(0)}$  angeben kann, z. B. daß  $\mathfrak{A}^{(0)}(x, y)$  räumlich konstant sein muß, ist es zulässig, die Integralgleichung so auszuwerten, wie dies Strutt in seiner zuerst erwähnten Arbeit getan hat.

2) Bekanntlich tritt beim Skineffekt immer das Produkt  $\sigma \omega l$  auf, wobei  $l$  eine Größe von der Dimension einer Länge ist. Bei kreisförmigem Querschnitt beispielsweise ist  $l = r$ , dem Abstand von der Leiterachse.

erfüllt und demnach  $\mathfrak{M}^{(0)}$  von  $\sigma$  unabhängig ist, nicht aber, wenn bloß die selbstverständliche Beziehung

$$(7a) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathfrak{M} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathfrak{M}^{(0)}$$

besteht<sup>1)</sup>.

Als wirklich vorgegeben, im strengen Sinne des Wortes, wird man  $\mathfrak{M}^{(0)}$  dann betrachten dürfen, wenn die erwähnten Bedingungen ausreichen, um  $\mathfrak{M}^{(0)}$  *eindeutig* festzulegen. Im allgemeinen ist aber Bedingung (7) mit der Forderung  $E = \text{const}$  oder  $M = \text{const}$ , unvereinbar, wie an dem einfachen z. T. von Strutt selbst behandelten Beispiel eines zylindrischen Leiters von kreisförmigem Querschnitt gezeigt werden soll. Aus Dimensionsgründen zu schließen, daß  $c_1$  in (6) bzw.  $c_2$  in (6a) die Frequenz nicht mehr enthält, ist unzulässig. Die Leitfähigkeit  $\sigma$  hat im elektromagnetischen System die Dimension  $[l^{-2}t]$ , daher ist mit Rücksicht auf  $\alpha^2 = -4\pi i \omega \sigma$  z. B. bei kreisförmigem Querschnitt die Größe  $(\alpha R)$  ( $R$  Leiterradius) dimensionslos und es kann  $c_1$  bzw.  $c_2$  sehr wohl von dieser Größe abhängen. Die Bedingung (7) ist sicher erfüllt, wenn im Außenraum die Funktion  $\mathfrak{M}$ , die durch die Stetigkeitsverhältnisse am Leiterrand eindeutig an die Funktion  $\mathfrak{M}^{(0)}$  im Leiterinnern geknüpft ist, in genügend großer Entfernung vom Leiter der Funktion  $\mathfrak{M}^{(0)}$  beliebig nahe kommt. (Man denke etwa an ähnliche Aufgaben der Elektrostatik oder Magnetostatik, z. B. eine Kugel in einem homogenen Feld.) Dadurch wird auch aufgeklärt, welche Rolle die Ausstrahlungsbedingung in der später zu besprechenden Arbeit E. Rotheres spielt.

Es möge nun in diesem Zusammenhange der Fall des Skin-effektes in einem unendlich langen zylindrischen Leiter mit Kreisquerschnitt betrachtet werden. Für den unendlich langen zylindrischen Leiter lautet die Integralgleichung

$$(2a) \quad \begin{cases} i(x, y) + \frac{\alpha^2}{2\pi} \iint_R i(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \\ = -i\omega\sigma A^{(0)}(x, y) = C \end{cases}$$

1) Es wurde  $\sigma \rightarrow 0$  geschrieben und nicht  $\sigma = 0$ , um gewissen Schwierigkeiten auszuweichen, die sich sonst ergeben, z. B. wenn die Gesamtstromstärke als vorgegeben zu betrachten ist. Der quasistationäre Ansatz ist natürlich nur bei guten Leitern, wenn der Verschiebungsstrom *neben* dem Leitungsstrom vernachlässigt wird, zulässig, keinesfalls aber bei  $\sigma = 0$ . Trotzdem muß man so rechnen als wäre er auch dann noch gültig, wenn man von der erörterten Formulierung ausgeht. Für  $\sigma = 0$  gäbe es dann überhaupt keinen Strom, so daß man die Bedingung  $J = \text{const}$  bei Hereinbringen des Leiters in das Feld gar nicht aufstellen könnte. So ist man nur genötigt zuzulassen, daß für  $\sigma \rightarrow 0$  gewisse Größen in bestimmter Weise unendlich groß werden.

und aus dieser folgt die Berechnung von  $C^1$ )

$$i(r) + \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left\{ \ln \left[ \left( \frac{r}{\varrho} \right)^2 + 1 - 2 \left( \frac{r}{\varrho} \right) \cos(\varphi - \chi) \right] \right\} \varrho i(\varrho) d\varrho = C$$

oder

$$i(r) + \alpha^2 \int_0^r i(\varrho) \varrho \ln \frac{r}{\varrho} d\varrho = C + \alpha^2 \int_0^R i(\varrho) \varrho \ln \varrho d\varrho = K.$$

Die Lösung dieser Volterrasschen Integralgleichung für  $i(r)$

$$i(r) + \alpha^2 \int_0^r i(\varrho) \varrho \ln \frac{r}{\varrho} d\varrho = K$$

— am einfachsten durch die Neumannsche Reihe — ergibt, wie man sich leicht überzeugen kann, im Einklang mit der Formel (6) von Strutt für die Stromdichte die Formel (3)

$$(3) \quad i(r) = K J_0(\alpha r),$$

was sonst durch unmittelbare Integration der Wellengleichung bei Voraussetzung axialer Symmetrie und der Regularität der Lösung für  $r=0$  hergeleitet wird. Die Konstante  $K$  läßt sich mittels des Umlaufintegrals  $\oint \mathfrak{H}_\varphi dl = 4\pi J$  aus der Gesamtstromstärke  $J$  berechnen und hat den Wert ( $R$  Leiterradius)

$$K = \frac{\alpha J}{2\pi R J_1(\alpha R)}.$$

Da ferner

$$\begin{aligned} \int_0^R J_0(\alpha \varrho) \varrho \ln \varrho d\varrho &= \frac{1}{\alpha^2} (\alpha \varrho) J_1(\alpha \varrho) \ln \varrho \Big|_0^R - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^R J_1(\alpha \varrho) d(\alpha \varrho) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} [\alpha R J_1(\alpha R) \ln R + J_0(\alpha R) - 1] \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich für  $C$

1) In den Rechnungen Strutts finden wir mehrere Versehen. Es soll richtig heißen:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2 \left\{ \left( \frac{r}{\varrho} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r}{\varrho} \cos(\Phi - \Theta) \right\}$$

anstatt

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2 \left\{ \left( \frac{r}{\varrho} \right)^2 + 1 + 2 \frac{r}{\varrho} \cos(\Phi - \Theta) \right\},$$

derselbe Zeichenfehler befindet sich in Formel (4), ebenso in der darunter stehenden Formel für  $0 < \varrho < r$ , in welcher außerdem rechts  $\frac{r}{\varrho}$  statt  $\ln \frac{r}{\varrho}$  steht und schließlich in der Formel für  $\mathfrak{S}(r)$  auf der folgenden Seite.

$$(8) \quad C = K[\alpha R J_1(\alpha R) \ln R + J_0(\alpha R)]$$

oder

$$(8a) \quad C = J \left[ \frac{\alpha^2 \ln R}{2\pi} + \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{2\pi R J_1(\alpha R)} \right]$$

also ein Wert, der, wie man sieht, bereits sowohl die *Leiterdimensionen als auch die Frequenz und die Leitfähigkeit* enthält. Auch wenn man das Linienintegral der Feldstärke  $E$  am Umfang einführt, ist dies deutlich zu sehen, denn es ist<sup>1)</sup>

$$(9) \quad E = - \frac{2 i \omega J}{\alpha R J_1(\alpha R)} J_0(\alpha R).$$

Dasselbe gilt offenbar auch für  $A^{(0)}(x, y)$ , das in diesem Falle den Wert hat (für  $\mu = 1$ )

$$(10) \quad A^{(0)}(x, y) = J \left[ 2 \ln R + \frac{2 J_0(\alpha R)}{\alpha R J_1(\alpha R)} \right] = C^*$$

und zwar auch dann, wenn man  $J$  ebenfalls durch  $E$  ausdrückt. Am besten übersieht man den Sachverhalt, wenn man  $A^{(0)}(x, y)$  in der Form schreibt

$$(10a) \quad A^{(0)}(x, y) = 2 J \ln R - \frac{E}{i \omega}.$$

Wie man sieht ist weder bei konstant gehaltenen  $E$  noch bei konstant gehaltenen  $J$  zulässig,  $A^{(0)}(x, y)$  im festgelegten Sinne als vorgegebenes Feld zu betrachten, in das man den Leiter hineinbringt. Deshalb ist die Integralgleichung zur allgemeinen Ermittlung der Frequenzabhängigkeit, wie sie von Strutt in der zweiten eingangs erwähnten Arbeit durchgeführt wurde, nicht geeignet.

Vergleicht man Formel (10a) mit Formel (6), so sieht man dann nach (9), da das Verhältnis  $E/J$  von der Frequenz abhängt, daß *entgegen* der Voraussetzung Strutts

$$c_1 = \frac{\omega A^{(0)}(x, y)}{E} \quad \text{bzw.} \quad c_2 = \frac{A^{(0)}(x, y)}{M}$$

von der Frequenz *nicht unabhängig* ist. Damit entfällt die Möglichkeit der Herleitung der Frequenzabhängigkeit des Skineffektes in der von Strutt durchgeführten Weise, denn diese beruht auf der ausdrücklichen Voraussetzung, daß  $c_1$  bzw.  $c_2$  die Frequenz nicht mehr enthält. [Vgl. die Ausführungen auf S. 304<sup>2)</sup>.]

1) Vgl. z. B. das Lehrbuch von Cl. Schaefer, 3. Bd., I. Teil.

2) Ein gewisses Interesse bietet noch das Verhalten der betrachteten Größen beim Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$ . Bei festgehaltenem  $I$  wird

$$A(x, y) \approx \frac{4 J}{\alpha^2 R^2} - J \frac{r^2}{R^2},$$

IIa. Nach dieser Feststellung ist es nicht schwer den Widerspruch aufzuklären, den E. Rothe in seiner Arbeit<sup>1)</sup> vermerkt. E. Rothe weist darauf hin, daß die von ihm mit Berücksichtigung des Verschiebungsstromes abgeleitete „strenge“ Integralgleichung des Skin-effektes<sup>2)</sup> bei nachträglicher Vernachlässigung mit der von anderen Autoren abgeleiteten Integralgleichung, die von vornherein ohne Verschiebungsstrom rechneten, nicht übereinstimmt.

Die ohne Berücksichtigung des Verschiebungsstromes abgeleitete und im vorangegangenen Abschnitt diskutierte Integralgleichung lautet bei E. Rothe<sup>1)</sup>

$$(2a) \quad I(P) - 2i\omega\sigma\mu \int_B I(\Pi) \ln r d\Pi = -i\omega\sigma A^{(0)}(P),$$

während die „strenge“ Gleichung auf

$$(2a') \quad I(P) - 2i\omega\sigma\mu \int_B I(\Pi) \ln r d\Pi = -i\omega\sigma [A^{(0)}(P) + k_1]$$

mit

$$k_1 = \left\{ 2 \ln \frac{2}{rk} - i\pi \right\}$$

führt, wenn

$$k^2 = \epsilon_a \mu \omega^2$$

( $\epsilon_a$  Dielektrizitätskonstante des Außenraumes) ist. Dabei soll nach Rothes Darstellung in beiden Fällen  $A^{(0)}(P)$  dasselbe bedeuten, nämlich ein vorgegebenes Feld, in das man sich den Leiter hineingebracht denkt. Vorgreifend wollen wir schon hier bemerken, daß, wie sich zeigen wird,  $A^{(0)}(P)$  in den beiden Integralgleichungen nicht dieselbe Funktion bedeutet. Beide unterscheiden sich vielmehr um die Konstante  $k_1$ . Hinsichtlich dieser Konstanten ist zunächst sehr auffallend, daß sie beim Grenzübergang  $\epsilon_a \rightarrow 0$  — im allgemeinen ist die Vernachlässigung des Verschiebungsstromes identisch mit der

$$\frac{\alpha^2}{2\pi} \int_B A(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \approx 2J \ln R - J + \frac{Jr^2}{R^2},$$

$$A^{(0)}(x, y) \approx \frac{4J}{\alpha^2 R^2} - J + 2J \ln R.$$

Die Vektorpotentiale zeigen demnach tatsächlich das in Bemerkung S. 305 erwähnte Verhalten, bei festgehaltenem  $E$  am Leiterrand wird

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{(0)}(x, y) = -\frac{E}{i\omega}.$$

1) E. Rothe, a. a. O. S. 222, Fußnote.

2) E. Rothe, a. a. O. S. 221, Fußnote.

Annahme  $\varepsilon = 0$  — logarithmisch unendlich wird. Außerdem wäre das additive Hinzutreten einer Größe von der Art des  $k_1$ , die u. a. den Logarithmus der Eulerschen Konstanten  $\gamma$  enthält, zu  $A^{(0)}(P)$ , das ja eine anschauliche Bedeutung haben soll, recht merkwürdig. Wie die Verhältnisse liegen und worauf der von Rothe vermerkte Widerspruch zurückgeführt werden kann, läßt sich wieder bereits an dem einfachen Fall eines kreiszylindrischen Einzeleleiters mit voller Klarheit überblicken. Aus diesem Grunde möge die aus den Rothaschen Ansätzen sich ergebenden eindeutigen Lösung der Differentialgleichungen im Leiterinneren und im Außenraume explizit ausgerechnet und im Zusammenhange mit der Rothaschen Integralgleichung betrachtet werden. Bezüglich einiger Bedenken physikalischer Natur, die die Ansätze selbst betreffen, soll noch am Schlusse dieser Arbeit einiges gesagt werden.

E. Rothe erfüllt die vollständigen Maxwellschen Gleichungen sowohl im Innern als auch im Außenraume dadurch, daß er für das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  und das mit diesem verknüpfte skalare Potential ansetzt:

$$\Phi = 0, \quad \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0, \quad \mathfrak{A}_z = A(x, y) e^{i\omega t},$$

wobei für  $A(x, y)$  die sogenannte Wellengleichung gelten soll, und zwar

$$(11) \quad \Delta A + \alpha_1^2 A = 0, \quad \alpha_1^2 = \varepsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu$$

im Leiter,

$$(11a) \quad \Delta A + \alpha_2^2 A = 0, \quad \alpha_2^2 = \varepsilon_a \mu \omega^2$$

im Außenraum,

$$\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Dann soll  $A$  so beschaffen sein, das es den Stetigkeitsbedingungen für das elektrische und magnetische Feld Gewähr leistet.

Ferner soll für  $\sigma = 0$  und offenbar  $\varepsilon = \varepsilon_a$  (es sei später überall der Einfachheit halber  $\varepsilon = \varepsilon_a$  vorausgesetzt)<sup>1)</sup>  $\Phi = \Phi_0$  und  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)}$  sein und schließlich soll  $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^{(0)}$  der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen.

Lassen wir diese letzte Bedingung für den Augenblick beiseite, dann erhält man bei Erfüllung aller übrigen Bedingungen für  $\mathfrak{A}$ , wenn  $J$  wiederum den durch das Umlaufsintegral der magnetischen Feldstärke längs des Leiterrandes definierten Gesamtstrom bezeichnet.

$$(12) \quad A_1 = \frac{2J}{\alpha_1 R J_1(\alpha_1 R)} J_0(\alpha_1 r)$$

1) Diese für unsere Betrachtung unwesentliche Bedingung fehlt bei E. Rothe.



für das Vektorpotential im Leiter, als einzig mögliche Lösung, die auch in dem Punkte  $r = 0$ , der dem Querschnitte angehört, endlich bleibt. Die Grenzbedingungen erfordern, daß am Leiterrand, also für  $r = R$ , das Vektorpotential samt Normalableitung stetig durch die Grenze geht. Setzt man somit im Außenraum

$$(13) \quad A_2 = D_1 J_0(\alpha_2 r) + D_2 H_0^{(2)}(\alpha_2 r),$$

wobei  $H_0^{(2)}(\alpha_2 r)$  die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt, dann sind durch die Grenzbedingungen  $D_1$  und  $D_2$  völlig bestimmt und man erhält

$$(13a) \quad \begin{cases} A_2 = i\pi J \left\{ \left[ H_0^{(2)}(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} H_1^{(2)}(\alpha_2 R) \right] J_0(\alpha_2 r) \right. \\ \left. - \left[ J_0(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} J_1(\alpha_2 R) \right] H_0^{(2)}(\alpha_2 r) \right\}. \end{cases}$$

Man sieht, daß das Vektorpotential bereits eindeutig bestimmt wurde, ohne daß die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung irgendeine Rolle dabei spielte, denn auch das Verhalten von  $A_2$  im Unendlichen ist bereits festgelegt. Eine Anwendung der Ausstrahlungsbedingungen auf  $\tilde{A} = A - A^{(0)}$  kann also nur eine Einschränkung der Möglichkeiten für die Wahl von  $A^{(0)}$  bedeuten, das demnach *gar nicht mehr beliebig vorgegeben sein kann*. In unserem speziellen Falle ist durch die Ausstrahlungsbedingung  $A^{(0)}$  ebenso eindeutig festgelegt wie  $A$ ; es kann  $A^{(0)}$  gar nichts anderes sein, als der erste Teil von  $A_2$ , somit

$$(14) \quad A^{(0)} = i\pi J \left[ H_0^{(2)}(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} H_1^{(2)}(\alpha_2 R) \right] J_0(\alpha_2 r).$$

Nun soll für  $\sigma = 0$ ,  $A = A^{(0)}$  werden. Man sieht aus Formel (13a), daß dies bei vorgegebenem Gesamtstrom  $J$  im Leiter (ebenso wie bei vorgegebener elektrischer Feldstärke am Leiterrand) jedenfalls nur dann zutrifft, wenn man

$$(15) \quad D_1 = i\pi J \left[ H_0^{(2)}(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} H_0^{(2)}(\alpha_2 R) \right]$$

als den Wert betrachtet, der gleichsam nach Hereinbringen des Leiters in das ursprüngliche Feld erhalten bleiben soll. Nur in diesem Falle geht

$$(13b) \quad A_2 = D_1 \left\{ J_0(\alpha_2 r) - \frac{J_0(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} J_1(\alpha_2 R)}{H_0^{(2)}(\alpha_2 R) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{J_0(\alpha_1 R)}{J_1(\alpha_1 R)} H_1^{(2)}(\alpha_2 R)} H_0^{(2)}(\alpha_2 r) \right\},$$

für  $\sigma = 0$ , somit  $\alpha_1 = \alpha_2$  tatsächlich in  $A^{(0)}$  über. Man beachte, daß bei der Aufstellung der Integralgleichung nur der Forderung

Genüge geleistet wurde, das  $A^{(0)}$  der für  $\sigma = 0$  spezialisierten Differentialgleichung gehorchen soll, und nicht der weitergehenden Forderung E. Rothés, daß für  $\sigma = 0$ ,  $A = A^{(0)}$  sein soll. Der in Formel (14) angegebene Wert von  $A^{(0)}$  ist nun auch wirklich durch die von E. Rothe verwendete Integralgleichung mit der Verteilung der Stromdichte im Leiter verknüpft, er wird aber beim Grenzübergang  $\alpha_2 \rightarrow 0$  nicht identisch mit dem von Manneback, Strutt usw. eingeführten vorgegebenen Vektorpotential.

Es ist für  $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$H_0^{(2)}(\alpha_2 R) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \alpha_2 R} + 1 + \dots +$$

+ Glieder mit  $(\alpha_2 R)^2$  als Faktor

$$H_1^{(2)}(\alpha_2 R) \approx \frac{2i}{\pi \alpha_2 R} + \dots$$

somit

$$A^{(0)} = J \left[ -2 \ln \frac{2}{\alpha_2 \gamma} + i\pi + 2 \ln R + \frac{2 J_0(\alpha_1 R)}{\alpha_1 R J_1(\alpha_1 R)} \right]$$

und es wird (für  $\mu = 1$ )

$$-i\omega\sigma \left[ A^{(0)} + \left( 2 \ln \frac{2}{\alpha_1 \gamma} - i\pi \right) J \right] = J \left[ \frac{\alpha_1^2 \ln R}{2\pi} + \frac{\alpha_1 J_0(\alpha_1 R)}{2\pi R J_1(\alpha_1 R)} \right].$$

Dies ist aber nach Formel (8a) nichts anderes, als der Wert der Konstanten  $C$  in der Integralgleichung von Manneback, Strutt usw. bei deren Aufstellung der Verschiebungsstrom von vornherein vernachlässigt wurde. Der von E. Rothe in seiner Arbeit<sup>1)</sup> vermerkte Widerspruch besteht also nicht zurecht, es hat  $A^{(0)}(P)$  in Formel (2a) bloß eine andere Bedeutung als  $A^{(0)}(P)$  in Formel (2a'), und zwar unterscheiden sich die beiden Werte gerade um das Glied, das für  $\alpha_2 \rightarrow 0$  logarithmisch unendlich wird, nämlich um

$$k_1 = J \left\{ 2 \ln \frac{2}{\gamma \alpha_2} - i\pi \right\}.$$

Setzt man in beiden Gleichungen jeweils die richtigen Werte für  $A^{(0)}$ , dann werden die Gleichungen völlig identisch.

IIb. Gegen den Rothéschen Ansatz ist noch vom physikalischen Standpunkt einzuwenden, daß er überhaupt nicht den Ausbreitungsvorgang längs der unendlich lang gedachten Leiterachse berücksichtigt. In den klassischen Arbeiten von A. Sommerfeld „Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes“<sup>2)</sup>

1) E. Rothe, a. a. O. S. 222, Fußnote.

2) A. Sommerfeld, Wied. Ann. d. Phys. u. Ch. 67. S. 232–240. 1899.

deren Ergebnisse auch in Lehrbüchern wie z. B. Riemann, Webers Differentialgl. der Physik II zu finden sind und Gustav Mie „Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten“<sup>1)</sup> wird dieser in ganz natürlicher Weise dadurch berücksichtigt, daß die Abhängigkeit des Zustandes von der  $z$ -Koordinate längs der Leiterachse durch den Faktor

$$e^{icz}$$

berücksichtigt wird, wobei der Wert von  $c$  für die Ausbreitungsgeschwindigkeit und Dämpfung längs der Leiterachse maßgebend ist. Das Vektorpotential hat dann im allgemeinen die Form

$$\mathfrak{A} = \{A(x, y)\mathfrak{f} + \nabla R(x, y) \times \mathfrak{f}\} e^{icz},$$

wenn  $\mathfrak{f}$  ein Einheitsvektor in Richtung der  $z$ -Achse ist, und sowohl  $A(x, y)$  als auch  $R(x, y)$  der Wellengleichung, aber mit anderen Paramenten nämlich

$$\Delta A + (\alpha_1^2 - c^2)A = 0 \quad \text{im Leiter}$$

$$\Delta A + (\alpha_2^2 - c^2)A = 0 \quad \text{im Außenraum.}$$

Dieselben Differentialgleichungen gelten für  $R(x, y)$ , das nur im Falle radialer Symmetrie identisch verschwindet. Der Wert von  $c$  ist durch die Rückleitung bestimmt und zwar erfolgt diese im Sommerfeldschen Fall nur durch Verschiebungsströme, während G. Mie bei Behandlung des Lechersystems zeigt, welchen Wert  $c$  bei reiner oder überwiegend metallischer Rückleitung annimmt, falls die Drähte weit genug voneinander entfernt sind, so daß in diesem Falle die radiale Symmetrie für jeden Einzeldraht im Leiter selbst und auch in seiner Umgebung nicht merklich gestört ist. Sommerfeld bemerkt folgerichtig, daß jede willkürliche Annahme eines reellen  $c^2 < \alpha_2^2$  zwangsläufig zur Annahme von Energiequellen im Unendlichen (oder einer gekünstelten Annahme der Rückleitung) führt. E. Roth's Ansatz geht aber aus diesem allgemeinen Ansatz dadurch hervor, daß man

$$c = 0$$

setzt. Wie wenig diese Annahme den normalerweise als Skineffekt betrachteten Verhältnissen gerecht wird, sieht man schon daraus, daß für  $c = 0$  und  $\sigma = 0$  die Hankelschen Funktionen zufolge ihres reellen Argumentes nicht exponentiell, wie bei A. Sommerfeld und G. Mie, wo im Argument der Zylinderfunktionen  $\sqrt{\alpha^2 - c^2}$  an Stelle von  $\alpha$  steht, sondern nurmehr wie  $\frac{1}{\sqrt{R}}$  abnehmen, gleich-

1) Gustav Mie, Ann. d. Phys. 2. S. 201—249. 1900.

bedeutend mit der Annahme, daß durch konzentrische Zylindermantelflächen in noch so großem Abstand von der Leiterachse der gleiche Energiefluß hindurchgeht.

Die Ansätze E. Rother ergeben überhaupt nur einen Energiefluß senkrecht zur Leiterachse. Die Energieübertragung mittels Leitungen erfolgt aber mittels des Energieflusses parallel zur Leitungsachse, während der Energiefluß senkrecht zur Leitungsachse im Leiter als Joulesche Wärme absorbiert wird. Bei E. Rothe fehlt (wegen  $\Phi = 0$ ) eben die für den Energiefluß längs der Leiterachse maßgebende Radialkomponente des elektrischen Feldes vollständig, obgleich nach der sogenannten optischen Theorie des Skineffektes, gerade für den ausgeprägten Skineffekt charakteristisch ist, daß eine gebundene Welle (Oberflächenwelle) mit sehr steiler Wellenfront längs der Leitung fortschreitet. Im sogenannten elektrostatischen Grenzfall, bleibt<sup>1)</sup> sogar gleichsam die *Radialkomponente allein* übrig, während die Parallelkomponente verschwindend klein wird. In diesem Fall ist  $c^2 \approx \alpha_2^2$ . Auch sonst unterscheidet sich  $c^2$  von  $\alpha_2^2$  bei guten Leitern nur wenig, so daß im Außenraum am Leiterrand und in der Umgebung des Leiters die Integrale der Wellengleichung sich in denkbar bester Annäherung auf die Integrale der Potentialgleichung reduzieren, die im quasistationären Fall im Außenraum gilt. Dies läßt schließen (bei dem von G. Mie behandelten Lechersystem ist dies leicht zu zeigen, für den Fall eines elliptischen Einzelleiters ist der Beweis hierfür in einer demnächst erscheinenden Arbeit des Verf. zu finden), daß auch bei den höchsten praktisch möglichen Frequenzen die Berechnung der Verteilung der Stromdichte im Leiter (gute metallische Leiter voraussetzt) bereits mittels des einfachen quasistationären Ansatzes möglich ist. Man erhält aber auch aus allen von E. Rothe hergeleiteten Formeln die entsprechenden des erwähnten quasistationären Ansatzes, wenn man den Grenzübergang  $\alpha_2 \rightarrow 0$  durchführt und aus diesem Grunde ist die Aufklärung des scheinbaren Widerspruches zwischen den von ihm und den anderen Autoren hergeleiteten Integralgleichungen von besonderem Interesse. Im quasistationären Fall ist der Wert des skalaren Potentials völlig unabhängig vom Werte des Vektorpotentials. Man kann wegen

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\alpha^2}{i\omega} \Phi$$

1) Sogar bei einem Lechersystem, bestehend aus zwei gleichen Drähten, bei dem alle Werte der Stromdichte jeweils entgegengesetzt gleich sind, müßte durch einen beliebig großen, beide Leiter umfassenden Zylinder immer noch ein radialer Energiefluß eintreten.

im Hinblick auf  $\alpha_2 = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$  setzen und trotzdem mit einem von Null verschiedenen skalaren Potential im Außenraume rechnen. Setzt man hier  $\Phi = 0$ , so ändert dies am Vektorpotential, somit auch an der Verteilung der Stromdichte usw. nicht das geringste, aber es gelten natürlich alle bezüglich der Radialkomponente im Außenraume, des Energieflusses usw. gemachten Einwände.

Diese Arbeit wurde im Phys. Institut der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn ausgeführt und ich danke dem Institutsvorstand Herrn o. ö. Prof. Dr. Erwin Lohr herzlichst für sein stetes Interesse, für viele wertvolle Ratschläge. Desgleichen danke ich herzlichst Herrn o. ö. Prof. Dr. Rudolf Weyrich, sowie allen Teilnehmern des von ihm geleiteten mathematischen Seminars für viele Anregungen und Diskussionen.

Brünn (ČSR.), Deutsche Technik, im Juni 1938.

(Eingegangen 24. Juni 1938)

kuge  
ausg  
Win  
daß  
der  
eine  
Mess  
Elem  
Anfa  
Kul  
dünn  
die  
Ges  
Kul  
Max  
Anfa  
Wel

diffu  
von  
dick  
kon  
ich

**Untersuchungen  
über die azimutale Intensitätsverteilung  
der Röntgenbremsstrahlung<sup>1)</sup>**

**Von Kurt Böhm**

(Mit 10 Abbildungen)

**A. Einleitung**

Die von einer Antikathode ausgehende Bremsstrahlung ist nicht kugelsymmetrisch über den ganzen Raum verteilt, sondern zeigt eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Emissionsrichtung, die durch den Winkel  $\vartheta$  gegen die Kathodenstrahlrichtung gegeben ist. Es ist klar, daß durch Geschwindigkeitsverlust und die damit verbundene Streuung der Kathodenstrahlelektronen innerhalb einer normalen Antikathode eine Fälschung dieser Intensitätsverteilung hervorgerufen wird. Zur Messung der wahren Intensitätsverteilung, wie sie sich für den Elementarprozeß, d. h. für Strahlung von Elektronen mit definierter Anfangsrichtung und Geschwindigkeit, ergibt, verwendeten deshalb Kulenkampff<sup>2)</sup> und Duane<sup>3)</sup> statt einer massiven Antikathode eine dünne Schicht ( $0,6 \mu$  Al), bzw. einen Quecksilber-Dampfstrahl, wodurch die Ablenkung der Elektronen aus der Einfallrichtung und der Geschwindigkeitsverlust weitgehendst ausgeschaltet wurden. Die von Kulenkampff erhaltenen Kurven zeigen hinsichtlich der Lage des Maximums und der Form eine deutliche Abhängigkeit von der Anfangsenergie der Kathodenstrahlen sowie von der beobachteten Wellenlänge des Spektrums.

Durch neuere Untersuchungen von P. B. Wagner<sup>4)</sup> an rückdiffundierenden Elektronen trat die Vermutung auf, daß selbst die von Kulenkampff verwendeten Schichten von  $0,6 \mu$  Al noch zu dick waren und eine Fälschung der azimutalen Verteilung bewirken konnten<sup>5)</sup>. Zur qualitativen Untersuchung dieses Resteinflusses habe ich mittels einer photographischen Methode in der Diplomarbeit<sup>6)</sup>

1) D 88.

2) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **87**. S. 597. 1928.

3) W. Duane, Proc. Nat. Acad. Amer. **13**. S. 662. 1927; **14**. S. 450. 1928.

4) P. B. Wagner, Phys. Rev. **35**. S. 98. 1930.

5) Vgl. H. Kulenkampff, Handb. d. Phys. Bd. XXIII/2, Kap. 3.

6) K. Böhm, Phys. Ztschr. **38**. S. 334. 1937.





ist so dimensioniert (2 mm Durchmesser), daß die von der Kathode *W* emittierten Elektronen nicht auf die Innenwand des Kanals gelangen können. Der auf die Folie *F* treffende Bruchteil des gesamten Emissionsstromes ist sehr klein (etwa  $\frac{1}{100}$  der Gesamtemission); durch die ohnedies sehr geringe Belastbarkeit der Folie ist derselbe jedoch vollkommen ausreichend. Von der Folie aus gelangen die Kathodenstrahlen nach dem Durchdringen der Schicht etwas verbreitert auf die ebenfalls mit Wasser gekühlte Anode *A*. Zwischen der Blende *B*<sub>1</sub> und der Folie *F* befindet sich ein beweglicher Schieber, der in den Strahlengang der aus dem Kanal austretenden Elektronen gebracht werden konnte; auf diese Weise wird ein Zerstören der Folie durch die beim Abschalten der Hochspannung mit verminderter Energie auf die Folie gelangenden Elektronen, die infolge ihrer geringen Geschwindigkeit in der Schicht stecken bleiben, verhindert.

Das Gehäuse *G*, in dessen Mitte die Folie angebracht ist, besteht aus einem zylindrischen Messinggefäß von 10 cm Durchmesser, 8,5 cm Höhe und 0,5 cm Wandstärke. In der Höhe des Brennfleckes auf der Folie befindet sich in der vorderen Wandung ein etwa 7 mm hohes Fenster, das mit einem 0,015 mm starken Aluminiumblech abgeschlossen ist. Dasselbe ließ bei einer Wellenlänge von 1,5 Å noch etwa 85 % der Strahlung hindurch. Mit dieser Anordnung konnte die Intensitätsverteilung in einem Winkelbereich von 25—150° beobachtet werden. Um die an der Innenwand des Gehäuses ausgelöste Streustrahlung, die von sehr stark abgelenkten Elektronen herrührt und sich besonders bei großen Azimutwinkeln bemerkbar macht, auf ein Minimum herabzusetzen, habe ich die innere Wandung mit einer Graphitschicht überzogen.

## 2. Hochspannungsquelle

Die Hochspannung wurde mit einem Hochspannungstransformator in der einfachen Einweggleichrichter-Schaltung erzeugt. Zur Glättung der erhaltenen pulsierenden Gleichspannung benutzte ich einen Kondensator von 0,05  $\mu$ F. Bei der erforderlichen geringen Belastung von  $\frac{1}{10}$  mA reicht die Dimensionierung der Kapazität vollkommen aus, um eine genügende geringe Welligkeit zu gewährleisten.

Die Messung der Hochspannung erfolgte mit einem statischen Voltmeter nach Starke-Schröder<sup>1)</sup>.

Die Messung des Gesamtmissionsstromes erfolgte mit dem Milliampèremeter *MA*<sub>1</sub>, das in der Erdleitung der Röhre lag (s. Abb. 1). Der durch die Blenden in das Gehäuse gelangende Bruchteil der Emission betrug für alle Messungen nur  $3,5 \cdot 10^{-6}$  Amp. und wurde mit einem Siemens Türmchengalvanometer *MA*<sub>2</sub>, das eine Empfindlichkeit von  $10^{-7}$  Amp./Skt. hatte, getrennt gemessen. Aus diesem Grunde mußte die Röhre *R* isoliert in das Gehäuse *G* eingeführt werden.

1) Starke u. Schröder, Arch. El. 20. S. 115. 1928.

Der Spannungsbereich, in dem Messungen ausgeführt wurden, konnte wie bei den früheren Beobachtungen von Kulenkampff nicht beliebig variiert werden. Nach hohen Spannungen ist er begrenzt durch die Güte des Vakuums, zu den niedrigen Spannungen hin durch den Umstand, daß selbst bei den noch dünneren Magnesiumfolien Energieverlust und Diffusion nicht mehr vernachlässigt werden können. Die Verteilungskurven wurden deshalb bei Spannungen von 20–40 kV aufgenommen.

### 3. Intensitätsmessungen

Die durch die begrenzte Belastbarkeit der Folien erhaltene geringe Strahlungsintensität erfordert eine sehr empfindliche Nachweismethode. Photographische wie Ionisationsmethode reichen zu einer genauen Messung nicht aus; erst die Verwendung einer Zählmethode macht es möglich, die extrem geringen Intensitäten meßbar zu erfassen. Im vorliegenden Fall ist der Spitzenzähler dem Zählrohr vorzuziehen,

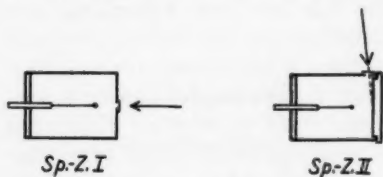


Abb. 2. Spitzenzähler

da bei letzterem durch den verhältnismäßig eng ausgeblendeten Röntgenstrahl nur ein kleiner Teil des zählfähigen Bereichs ausgenützt würde, während der Resteffekt wesentlich größer als beim Spitzenzähler ist. In dieser Arbeit wurde die Intensitätsmessung je nach der zu untersuchenden Wellenlänge mit zwei verschiedenen Spitzenzählern, die sich in der Art der Auslösung der Photoelektronen voneinander unterscheiden, durchgeführt.

Die Messung der langwelligen Strahlung ( $1,6 \text{ \AA}$ ) erfolgt mit dem üblichen Spitzenzähler, in Abb. 2 mit *Sp. Z. I* bezeichnet, durch die im Füllgas ausgelösten Photoelektronen. Der Eintrittsspalt von  $1 \times 10 \text{ mm}$ , der mit einem Glimmerplättchen von  $20 \mu$  bedeckt ist, befindet sich in der vorderen Wandung gegenüber der Spitze. Dieser Zähler eignet sich durch die im Gas mit  $\lambda^3$  ansteigende Absorption besonders zur Messung von langwelliger Strahlung. Beim Übergang zu härterer Strahlung ( $0,35 \text{ \AA}$ ) wird wegen abnehmender Absorption auch die Zahl der im Gas ausgelösten Photoelektronen immer geringer. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit empfiehlt es sich deshalb, einen von Pahl und Faessler<sup>1)</sup> angegebenen Zähler (s. Abb. 2 *Sp. Z. II*) zu benutzen, bei welchem der ausgeblendete Röntgenstrahl durch

1) M. Pahl u. A. Faessler, Ztschr. f. Phys. **102**, S. 562. 1936.

einen an der Seite angebrachten Eintrittsspalt von  $3 \times 10$  mm unter sehr schrägem Winkel auf die Innenseite der Stirnwand fällt, die aus einer Nickelschicht bestand. Ist die Spitze in genügend großem Abstand von der Stirnwand angebracht, so befinden sich alle aus der Oberfläche austretenden Photoelektronen im wirksamen Zählbereich. Obwohl nur diejenigen von den gebildeten Elektronen, deren Reichweite größer ist als die Schichtdicke, in der sie entstanden sind, die Möglichkeit haben an die Oberfläche zu gelangen, überwiegt bei kurzwelliger Strahlung und kleinem Einfallswinkel die Zahl der aus der Metallschicht austretenden Photoelektronen gegenüber der im Gase erzeugten. Die Dimensionen bei beiden Spitzenzählern sind folgende: Länge 4 cm, Durchmesser 3 cm, Abstand Spitze-Stirnwand 0,8 cm, Durchmesser der Spitze etwa 0,12 mm. Die Zähler sind mit Argon von 60 cm Druck gefüllt. Die Arbeitsspannung liegt zwischen 1100 und 1200 Volt, während der spannungsunabhängige Bereich mindestens 50 Volt beträgt. Die mittels Zähler erhaltenen Impulse werden über einem 3 Röhren-Verstärker einem mechanischen Zählwerk zugeleitet und registriert.

Um die aus dem Gehäuse *G* austretende Strahlung in jeder Richtung messen zu können, ist der Spitzenzähler auf einem Schlitten befestigt, der um eine durch den Brennfleck der Folie gehende vertikale Achse gedreht werden kann. Durch den in 1 cm Entfernung vom Spitzenzähler angebrachten Spalt  $S_1$  von 0,9 mm Breite wird der Brennfleck im Zähler abgebildet. Spalt  $S_1$  muß infolgedessen so dimensioniert sein, daß das durch denselben begrenzte Strahlenbündel auch bei kleinen und großen Winkeln, wo der Brennfleck am größten erscheint, noch voll in den Zähler gelangen kann. Die an der Innenwand des Gehäuses *G* entstehende Fluoreszenzstrahlung, die unter allen möglichen Winkeln ausgeht und feinere Unterschiede der Verteilungskurven verwaschen würde, wird durch eine zweite Blende  $S_2$  von 5 mm Breite ausgeschaltet.  $S_2$  läßt nur die direkt von der Folie emittierte Strahlung ungehindert hindurchgehen, während die zumeist schief aus dem Fenster kommende Sekundärstrahlung nicht in den Zähler eintreten kann.

#### 4. Herstellung von dünnen Folien

In meinen Messungen benutzte ich ebenso wie Kulenkampff als Antikathode ein Element von niedriger Ordnungszahl. Die Verwendung eines leichten Elementes erfolgt unter dem Gesichtspunkt, eine eventuelle Störung durch die Eigenstrahlung, die sich bei schweren Elementen in dem hier in Frage kommenden Wellenlängenbereich bereits bemerkbar machen würde, zu beseitigen. Da, wie erwähnt,

die Schichten erheblich dünner als die käuflichen  $0,6 \mu$  starken Al-Folien sein müssen, und da es sehr schwierig sein dürfte, freitragende Schichten von dieser geringen Dicke ( $< 0,1 \mu$ ) herzustellen, verwendete ich als Träger für eine derartig dünne Schicht Zelluloidhäutchen von  $0,1 \mu$  Dicke, auf welche die Schicht im Hochvakuum aufgedampft wurde. Wegen der einfacheren Herstellung solcher Folien wurde das Aluminium durch das leichter verdampfbare, im periodischen System vorangehende Magnesium ersetzt, was für diese Betrachtungen ohne Bedeutung ist.

### C. Messungen

#### 1. Monochromatische Strahlung durch Filterung

Für die Untersuchung der azimutalen Intensitätsverteilung ist es wegen der Abhängigkeit der spektralen Zusammensetzung der emittierten Strahlung vom Azimut notwendig, dieselbe für eine bestimmte definierte Wellenlänge aufzunehmen. Die schwachen Intensitäten machen eine Zerlegung der Strahlung mit einem Kristall unmöglich, so daß die erforderlichen Wellenlängen durch geeignete Filter ausgesondert werden müssen. Um die spektrale Zusammensetzung der von einem bestimmten Filter hindurchgelassenen Strahlung berechnen zu können, ist es nötig, eine Annahme über die Zusammensetzung der ungefilterten Strahlung einer dünnen Folie zu machen.

Nach vorliegenden Messungen bzw. Berechnungen<sup>1)</sup> kann hierfür näherungsweise die einfache Formel

$$(1) \quad i_v = \text{const}$$

oder in Wellenlängeneinheiten:

$$(1a) \quad i_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \cdot i_v = \frac{\text{const}}{\lambda^2}$$

angesetzt werden. Mit Hilfe dieser Beziehung sind die im folgenden näher beschriebenen Filter berechnet worden.

Zur Ausfilterung der kurzwelligen Strahlung benutzte ich je nach der zu messenden Spannung Aluminium verschiedener Dicke, die so bestimmt wurde, daß an der Grenzwellenlänge nur 10% der ungefilterten Strahlung hindurchgelassen wurde. Auf diese Weise erhält man einen eng begrenzten Wellenlängenbereich, dessen Intensität von der Grenzwellenlänge zu längeren Wellen hin sehr rasch abfällt. Die mittlere Wellenlänge eines solchen ausgefilterten Bereiches ist um etwa 10% gegenüber der Grenzwellenlänge verschoben. In Tab. 1 sind die entsprechenden Daten zusammengestellt.

1) Vgl. H. Kulenkampff, Handb. d. Phys., a. a. O.

Tabelle 1

| Filter | Dicke<br>in cm | Spannung<br>in kV | Grenzwellenlänge $\lambda_0$<br>in Å | Mittl. Wellenlänge $\lambda_m$<br>in Å |
|--------|----------------|-------------------|--------------------------------------|--|
| Al     | 0,24           | 20                | 0,618                                | 0,65                                   |
| Al     | 0,60           | 31                | 0,398                                | 0,43                                   |
| Al     | 1,20           | 40                | 0,309                                | 0,35                                   |

Für mittlere Wellenlängen des Spektrums verwendet man Filter aus Elementen, deren *K*-Absorptionskante dem zu untersuchenden Wellenlängenbereich angehört. Filter von dieser Beschaffenheit absorbieren bei hinreichender Dicke auf der kurzwelligen Seite die gesamte Strahlung, während an der *K*-Kante die hindurchgelassene Intensität mit einem endlichen Wert einsetzt, der nach größeren Wellenlängen sehr rasch abnimmt. Die Dicke der Filter ist auch hier so berechnet, daß die mittlere Wellenlänge eines ausgefilterten Bereiches um 10% größer als die Wellenlänge der *K*-Absorptionskante ist (vgl. Tab. 2).

Tabelle 2

| Filter | Dicke<br>in cm | Spannung<br>in kV | Grenzwellenlänge $\lambda_0$<br>in Å | Wellenlänge<br>d. <i>K</i> -Kante $\lambda_K$<br>in Å | Mittl. Wellenlänge $\lambda_m$<br>in Å |
|--------|----------------|-------------------|--------------------------------------|---|--|
| Mo     | 0,015          | 31                | 0,398                                | 0,618   | 0,65                                   |

Liegt die *K*-Kante des Filters im noch langwelligeren Teil des Spektrums, so erhält man auch zu der kurzwelligen Grenze hin ein Ansteigen der hindurchgelassenen Strahlung. Es ist deshalb erforderlich, die in dem Bereich nahe der Grenzwellenlänge hindurchtretende Strahlung mit einem zweiten Filter, das nur den kurzwelligen Teil erfaßt, getrennt zu messen. Die Differenz aus beiden Messungen ergibt dann die Intensität der langwelligen Strahlung<sup>1)</sup>.

Das Abgleichen der Filter geschieht am besten experimentell, indem man für beide Filter die Durchlässigkeit für den kurzwelligen Wellenlängenbereich mit dem Spektrometer bestimmt. Im vorliegenden Fall war es möglich, die zur Messung der Wellenlänge 1,6 Å benutzte Filterkombination Kupfer-Aluminium für eine Wellenlänge des kurzwelligen Teiles der vom Filter hindurchgelassenen Strahlung mit einer zweiten im Institut vorhandenen Röntgenröhre mit Ag-Antikathode, deren *K<sub>a</sub>*-Linie in dem gewünschten Gebiet liegt, abzugleichen. Das für  $\lambda = 0,65$  Å bei 40 kV verwendete Filterpaar Mo-Cu konnte

1) Vgl. hierzu P. A. Ross, Journ. Opt. Soc. Amer. 16. S. 433. 1928.

nur aus den bekannten Absorptionskoeffizienten der beiden Elemente berechnet werden. Tab. 3 enthält alle wichtigen Angaben für Filter zur Messung sehr langwelliger Strahlung nach der Differenzmethode.

Tabelle 3

| Filter | Dicke<br>in cm | Spannung<br>in kV | Grenzwellen-<br>länge $\lambda_0$<br>in Å | Wellenlänge<br>d. K-Kante $\lambda_K$<br>in Å | Mittl. Wellen-<br>länge $\lambda_m$<br>in Å |
|--------|----------------|-------------------|---|---|---|
| Cu     | 0,007          | 20                | 0,618                                     | 1,378   | 1,60  |
| Al     | 0,194          |                   |   |   |   |
| Cu     | 0,007          | 31                | 0,398                                     | 1,378   | 1,60  |
| Al     | 0,194          |                   |   |   |   |
| Mo     | 0,015          | 40                | 0,309                                     | 0,618   | 0,65  |
| Cu     | 0,050          |                   |   |   |   |

## 2. Messung der Verteilungskurven

Alle Verteilungskurven wurden in der Weise gewonnen, daß die in einem Raumwinkel konstanter Größe emittierte Strahlung von bestimmtem Wellenlängenbereich  $d\lambda$  in Abhängigkeit vom Azimut bestimmt wurde. Der durch die spezielle Anordnung der Röhre bedingte Winkelbereich liegt zwischen 25 und 150°.

Da es bei dieser Untersuchung auf einen Vergleich der unter verschiedenen Winkeln erhaltenen Intensität ankommt, ist es wichtig, daß durch richtige Justierung des Spitzenzählers die Strahlung in jeder beliebigen Beobachtungsrichtung auch gleichmäßig erfaßt wird. Aus diesem Grunde muß das Eintrittsfenster des Zählers genügend breit sein, damit bei kleinen und großen Azimuten, wo das Spaltbild des Brennfleckes am größten erscheint, der ausgeblendete Strahl voll in den Zähler eintreten kann. Um eine sichere Einstellung des Zählers auf den Brennfleck zu gewährleisten, müssen die beiden Spalte  $S_1$  und  $S_2$  (vgl. Abb. 1) so dimensioniert sein, daß ein Flächenelement der Folie von etwa  $10 \times 10$  mm im Zähler noch abgebildet wird. Außerdem ist zu bedenken, daß durch die Änderung der Winkeldivergenz des ausgeblendeten Strahlenbündels, welche durch die von der Beobachtungsrichtung abhängige Größe des Brennfleckes bedingt ist, die auf der Stirnwand des Spitzenzählers *Sp. Z. II* bestrahlte Fläche verschieden groß ist. Wie leicht einzusehen ist, besteht die Möglichkeit, daß sich dadurch der Bruchteil der in der Stirnfläche aus gelösten Photoelektronen ebenfalls ändert. Zur Untersuchung dieses Einflusses habe ich die Intensität der unter einem bestimmten Winkel  $\vartheta$  emittierten Strahlung für verschiedene Stellungen der Mg-Folie, wodurch eine Änderung der Winkeldivergenz bewirkt wird, miteinander verglichen. Dabei konnte die Folie wegen



der mit der Dicke der Schicht (beim schrägen Auftreffen der Kathodenstrahlen) zunehmenden Diffusion und des Geschwindigkeitsverlustes nur um  $\pm 20^\circ$  aus der zur Anfangsrichtung der Kathodenstrahlen senkrechten Ebene gedreht werden. Die Messungen, die für verschiedene Winkel  $\vartheta$  wiederholt wurden, ergaben, daß ein solcher Einfluß nicht festgestellt werden konnte.

Nachdem der Spitzenzähler richtig justiert war, konnte mit den eigentlichen Messungen begonnen werden. Die pro Minute registrierten Impulse betrugen durchschnittlich 40 bis 100 für das Maximum der Verteilungskurven. Die Messung einer Kurve erfolgte derart, daß jeweils für einen Beobachtungspunkt die Impulse pro 5 Min. aufgenommen wurden; die Reihenfolge der gemessenen Punkte war, um einen bei einer Beobachtungszeit von mehreren Stunden unvermeidlichen Gang der Apparatur zu kompensieren, ganz willkürlich. Die Meßreihen wurden im allgemeinen mehrmals wiederholt, bis die Gesamtzahl der registrierten Impulse für jeden Beobachtungspunkt etwa 1000 betrug. Die wiederholt ausgeführten Messungen ergaben

immer wieder sehr gut denselben Verlauf der Verteilungskurven. Veränderungen der Schichtdicke, die durch die aufprallenden Elektronen verursacht werden, lassen ein Auswechseln der Folien nach etwa 10 Stunden Betriebsdauer angebracht erscheinen. Es zeigte sich, daß auch die an verschiedenen Folien, welche annähernd die gleiche Dicke besaßen, gemessenen Verteilungskurven gut reproduzierbar waren.

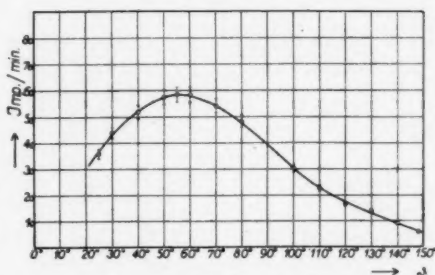


Abb. 3. Azimutale Intensitätsverteilung für  $\lambda = 0,43 \text{ \AA}$  bei 31 kV

Tabelle 4

| Azimut $\vartheta$ in $^\circ$ | Gesamte Impulszahl | Anzahl der Impulse pro Min. | Azimut $\vartheta$ in $^\circ$ | Gesamte Impulszahl | Anzahl der Impulse pro Min. |
|--------------------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| 25                             | 2149               | $35,9 \pm 1,8$              | 80                             | 2776               | $48,5 \pm 2,4$              |
| 30                             | 2563               | $44,3 \pm 2,2$              | 100                            | 1851               | $30,4 \pm 1,5$              |
| 40                             | 2361               | $52,0 \pm 2,6$              | 110                            | 893                | $22,8 \pm 1,1$              |
| 50                             | 4513               | $57,5 \pm 2,9$              | 120                            | 1418               | $16,6 \pm 0,8$              |
| 55                             | 5239               | $58,5 \pm 2,9$              | 130                            | 1034               | $13,7 \pm 0,7$              |
| 60                             | 5888               | $58,4 \pm 2,9$              | 140                            | 1130               | $9,1 \pm 0,4$               |
| 70                             | 3676               | $54,3 \pm 2,7$              | 148                            | 894                | $5,8 \pm 0,3$               |



In Tab. 4 sind als Beispiel die mit dem Spitzenzähler *Sp. Z. I* registrierten Intensitäten der azimuthalen Verteilungskurve für die Grenzwellenlänge bei 31 kV eingetragen und in vorstehender Abb. 3 graphisch dargestellt.

Als weiteres Beispiel sind in Tab. 5 die mit dem Spitzenzähler *Sp. Z. II* gemessenen Werte der Verteilungskurve für 1,6 Å bei 20 kV nach der Differenzmethode zusammengestellt; während in Abb. 4 das Ergebnis graphisch wiedergegeben wird.

Tabelle 5  
Anzahl der in der Minute registrierten Impulse

| Azimut $\vartheta$ in ° | Cu-Filter 0,007 cm | Al-Filter 0,194 cm | Diff. Cu-Al $\Delta$ kor. |
|-------------------------|--------------------|--------------------|---------------------------|
| 30                      | 88,1 $\pm$ 4,4     | 18,1 $\pm$ 0,9     | 66,0 $\pm$ 4,6            |
| 40                      | 96,0 $\pm$ 4,8     | 21,1 $\pm$ 1,0     | 70,9 $\pm$ 4,9            |
| 50                      | 103,4 $\pm$ 5,2    | 25,2 $\pm$ 1,2     | 74,4 $\pm$ 5,2            |
| 55                      | 103,2 $\pm$ 5,2    | 25,2 $\pm$ 1,2     | 74,0 $\pm$ 5,2            |
| 60                      | 100,0 $\pm$ 5,0    | 26,3 $\pm$ 1,3     | 70,7 $\pm$ 4,9            |
| 70                      | 98,0 $\pm$ 4,9     | 24,9 $\pm$ 1,2     | 70,1 $\pm$ 4,9            |
| 80                      | 89,5 $\pm$ 4,5     | 23,2 $\pm$ 1,1     | 64,3 $\pm$ 4,5            |
| 100                     | 71,1 $\pm$ 3,5     | 18,9 $\pm$ 0,9     | 50,2 $\pm$ 3,5            |
| 110                     | 60,2 $\pm$ 3,0     | 16,2 $\pm$ 0,8     | 42,0 $\pm$ 2,9            |
| 120                     | 53,0 $\pm$ 2,6     | 14,4 $\pm$ 0,7     | 37,6 $\pm$ 2,6            |
| 130                     | 44,7 $\pm$ 2,2     | 11,7 $\pm$ 0,6     | 32,0 $\pm$ 2,2            |
| 140                     | 38,5 $\pm$ 1,9     | 10,8 $\pm$ 0,5     | 26,7 $\pm$ 1,8            |
| 148                     | 35,6 $\pm$ 1,8     | 8,8 $\pm$ 0,4      | 25,8 $\pm$ 1,7            |

Die Zahl der Blindausschläge der beiden Zähler beträgt durchschnittlich 6—8 in der Minute; diese sind in den als Beispiel

angeführten Kurven und Tabellen bereits abgezogen.

Da es sich nicht vermeiden läßt, daß außer dem Brennfleck der Folie auch immer gleichzeitig ein Flächenstück der dahinter liegenden Gehäusewand, deren Größe durch die Anordnung der beiden Spalte  $S_1$  und  $S_2$  gegeben ist,

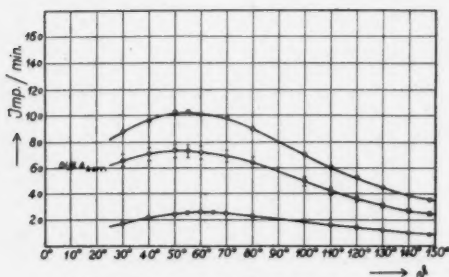


Abb. 4. Azimutale Intensitätsverteilung  
für  $\lambda = 1,60$  Å bei 20 kV

durch  $S_1$  im Zähler abgebildet wird, ist es erforderlich, die in der Wand ausgelöste Fluoreszenzstrahlung gesondert zu bestimmen. Man verfährt deshalb so, daß man den Schlitten, auf welchem Spitzenzähler und Blenden genau justiert sind, aus der durch den Brennfleck verlaufende Linie abwechselnd nach beiden

Seiten so weit verschiebt, bis nur die an der Rückseite des Gehäuses erzeugte Sekundärstrahlung im Zähler registriert wird. Der Mittelwert gibt dann die Größe dieser Strahlung an. Auf diese Weise wurde festgestellt, daß sich die Fluoreszenzstrahlung nur bei langen Wellen (Cu-Filter), welche auf Eigenstrahlung des im Messing vorhandenen Kupfers zurückzuführen ist, und bei hohen Spannungen (40 kV) bemerkbar macht. Die gemessene Intensität dieser Sekundärstrahlung ist nahezu gleichmäßig über den ganzen Winkelbereich verteilt, die Bestimmung derselben kann dadurch sehr genau durchgeführt werden. In Tab. 5 wie in Abb. 4 ist sie bei der Differenzbildung bereits berücksichtigt. Der von Kulenkampff (Ann. d. Phys. a. a. O.) bei Winkeln  $< 40^\circ$  und  $> 130^\circ$  festgestellte steile Anstieg der von gestreuten Elektronen in der Gehäusewand ausgelösten Streustrahlung war bei meinen Messungen in einem Winkelbereich von  $30^\circ$ — $150^\circ$  noch nicht feststellbar, was vermutlich auf geringere Streuung der durch die Folie hindurchgehenden Elektronen bei dünneren Schichten zurückzuführen ist.

### 3. Meßgenauigkeit

Da durchschnittlich für jeden Punkt 1000 Impulse gezählt wurden, beträgt der durch das Zählverfahren bedingte Fehler etwa 3%. Die zweite Fehlerquelle ist durch die über lange Beobachtungszeiten unvermeidlichen Schwankungen der Apparatur, die hauptsächlich eine Änderung des Emissionsstromes bewirken, gegeben. Der hierdurch hervorgerufene Fehler beläuft sich auf 2%, so daß der mittlere Gesamtfehler, mit dem die Messung einer Verteilungskurve behaftet ist, mit 5% angegeben werden kann.

Handelt es sich um die Bestimmung der azimutalen Intensitätsverteilung nach der Differenzmethode, so hat man darauf zu achten, daß das Verhältnis Differenz: Einzelmessung möglichst groß ist. Im allgemeinen betrug die Differenz 50—75% der Einzelmessung. Der Gesamtfehler bei dem Differenzverfahren ergibt sich zu 7%. Die in Tab. 4 und 5 angegebenen Fehlergrenzen sind hiernach berechnet.

## D. Ergebnisse und Diskussionen

### I. Übersicht über die Ergebnisse

#### 1. Abhängigkeit von der Wellenlänge bei konstanter Spannung

In einer Meßreihe wurde bei konstanter Spannung die azimutale Intensitätsverteilung für verschiedene Wellenlängenbereiche des Spektrums aufgenommen; die Wellenlängen wurden so gewählt, daß einmal ein Bereich nahe der Grenzwellenlänge und dann je nach dem Vorhandensein geeigneter Filter ein mittleres Gebiet und nach Möglichkeit eine Wellenlänge im noch langwelligeren Teil untersucht

wurden. In Abb. 5 sind die gewonnenen azimutalen Verteilungskurven in Abhängigkeit von der Wellenlänge für 3 verschiedene

konstante Spannungen wiedergegeben, und zwar in üblicher Weise in Polarkoordinaten. Meßpunkte und Fehlergrenzen sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Da die Meßmethode einen Vergleich der relativen Intensitäten der erhaltenen Verteilungskurven nicht erlaubt, sind dieselben unter der Annahme, daß die spektrale Energieverteilung einer dünnen Antikathode für  $\vartheta = 90^\circ$  durch  $i_\nu = \text{const}$  gegeben ist, für diesen Winkel auf gleiche Intensität umgezeichnet. Diese Annahme gilt angenähert in einem Bereich von der Grenzfrequenz  $\nu_0$  bis  $\nu_{0/2}$ ; für

$$\nu < \frac{1}{2} \nu_0$$

nimmt jedoch nach der Theorie von Sommerfeld <sup>1)</sup>  $i_\nu$  größere Werte an. Für  $\lambda = 1,60 \text{ \AA}$  bei  $V = 31 \text{ kV}$  ist die Intensität für  $\vartheta = 90^\circ$  hiernach bestimmt.

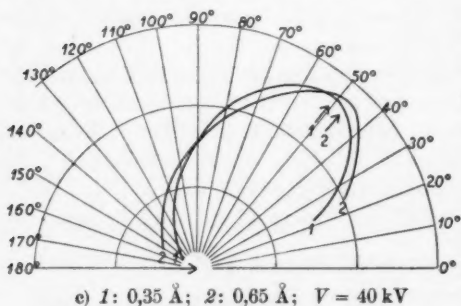
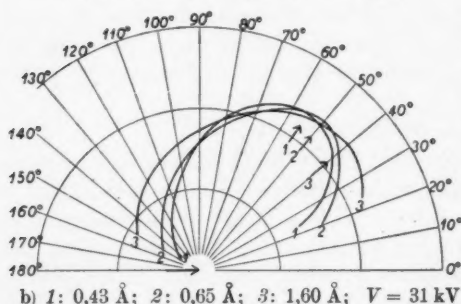
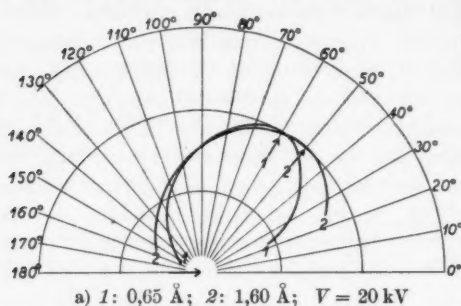


Abb. 5. Azimutale Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei konst. Spannung von 20, 31 und 40 kV

## 2. Abhängigkeit von der Spannung für die Grenzwellenlänge

Für die Abhängigkeit der azimutalen Intensitätsverteilung von der Spannung ist es wichtig, die Wellenlänge, bei der man die Messung

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 257. 1931.

ausführt, genau zu definieren. Hält man die Wellenlänge fest und erhöht die Spannung, so gehört die Wellenlänge einem immer langwelligeren Teil des Spektrums an. Um die Abhängigkeit von der Spannung allein untersuchen zu können, ist es zweckmäßig, die jeweils der angelegten Spannung entsprechende Grenzwellenlänge zu wählen. Unter diesem Gesichtspunkt sind in Abb. 6 aus Abb. 5 die azimutalen Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge bei 20, 31 und 40 kV abgebildet. Da sich auch hier die Kurven in keinem vergleichbaren Maßstab ergeben, sind die Intensitäten willkürlich für die 90°-Richtung gleichgesetzt.

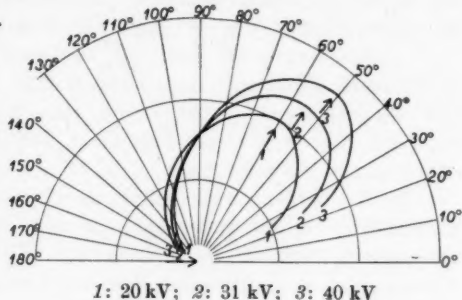


Abb. 6. Azimutale Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von der Spannung für die jeweilige Grenzwellenlänge

### 3. Abhängigkeit von der Spannung bei konstanter Wellenlänge

Der Vollständigkeit halber sind aus vorhergehenden Kurven in Abb. 7 die azimutalen Verteilungskurven für verschiedene Spannungen bei konstanter Wellenlänge dargestellt. Die bei 20 kV dem Grenzwellenlängenbereich angehörende mittlere Wellenlänge 0,65 Å wird mit zunehmender Spannung immer mehr in das langwellige Gebiet verschoben.

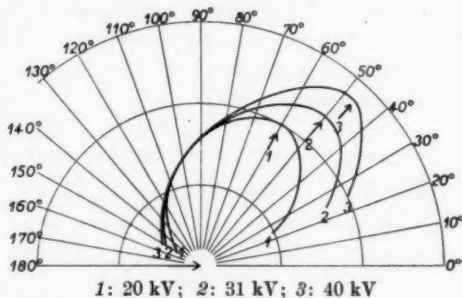


Abb. 7. Azimutale Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von der Spannung für konstante Wellenlänge 0,65 Å

## II. Einzelheiten der Ergebnisse

### 1. Form der Verteilungskurven

Gegenüber den von Kulenkampff an 0,6 μ starken Al-Folien

beobachteten Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge zeigen die mit den noch dünneren Mg-Folien erhaltenen Kurven, wie sie in Abb. 6 dargestellt sind, viel deutlicher, daß die Intensität in den

Winkeln 0 und  $180^\circ$  auf Null geht. Hieraus kann mit großer Wahrscheinlichkeit geschlossen werden, daß die mit einer Mg-Folie von  $< 0,1 \mu$  Dicke gemessene Intensitätsverteilung der wahren Energieverteilung, wie sie dem Elementarprozeß entspricht, praktisch gleichkommt; die Zahl der in dieser extrem dünnen Schicht vorhandenen Elektronen mit beträchtlicher Diffusion, die zur Emission der Strahlung beitragen, ist sicherlich so gering, daß eine hierdurch hervorgerufene Fälschung der Kurvenform nicht mehr wahrgenommen werden kann.

Beim Übergang von der Grenzwellenlänge zu längeren Wellen im Spektrum erhält man auch mit den dünnen Mg-Folien Verteilungskurven, welche die bereits von Kulenkampff beobachtete Abhängigkeit der spektralen Zusammensetzung der Strahlung vom Azimut bestätigen (vgl. Abb. 5). Während die Verteilungskurve für die Grenzwellenlänge den oben beschriebenen Verlauf zeigt, wird die Kurvenform mit größer werdender Wellenlänge flacher unter gleichzeitiger Zunahme der Intensität bei kleinen und großen Winkeln. Zwischen  $50$  und  $90^\circ$  liegt ein Maximum der Härte, das bei hohen Spannungen wesentlich stärker hervortritt; nach kleinen und großen Azimuten überwiegen dagegen mit abnehmender Spannung immer mehr die langwelligen Teile der Strahlung.

Um die beobachtete Verbreiterung der Kurvenform zahlenmäßig zum Ausdruck zu bringen, wird in Tab. 6 als Maß für die Breite der Verteilungskurven sowohl die Halbwertsbreite als auch das reziproke Verhältnis des Radiusvektors in Richtung des Intensitätsmaximums und der darauf errichteten Mittelsenkrechten eingeführt. Unter Halbwertsbreite ist in üblicher Weise die Breite (hier in Winkelgraden angegeben) zu verstehen, bei der die Intensität auf die Hälfte gesunken ist.

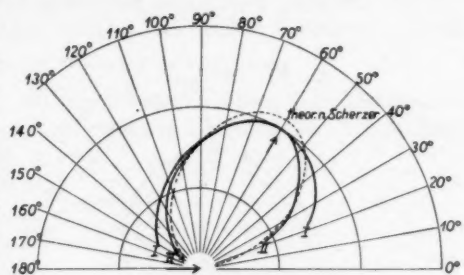
Tabelle 6

| Spannung | Wellenlänge | Halbwertsbreite<br>in Winkelgraden | Mittelsenkr.<br>Radiusvektor |
|----------|-------------|------------------------------------|------------------------------|
| 20 kV    | 0,65 Å      | $90^\circ$                         | 0,74                         |
|          | 1,60 Å      | $115^\circ$                        | 0,94                         |
| 31 kV    | 0,43 Å      | $82^\circ$                         | 0,69                         |
|          | 0,65 Å      | $91^\circ$                         | 0,76                         |
|          | 1,60 Å      | $122^\circ$                        | 0,96                         |
| 40 kV    | 0,35 Å      | $77^\circ$                         | 0,64                         |
|          | 0,65 Å      | $90^\circ$                         | 0,71                         |

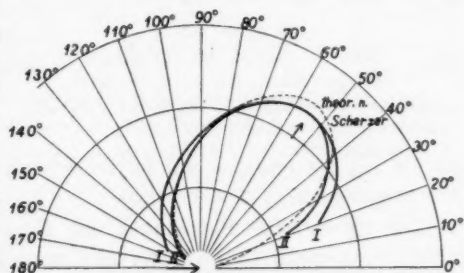
Die zusammengestellten Werte geben ein anschauliches Bild von der mit abnehmender Energie für die jeweilige Grenzfrequenz

sowie mit größeren Wellenlängen bei konstanter Spannung zunehmenden Verbreiterung; bemerkenswert ist das Ergebnis, daß für dieselbe Wellenlänge bei verschiedenen Spannungen die Breite der Kurve sich nicht ändert. Die kleinen Abweichungen liegen innerhalb der Meßgenauigkeit. Es läßt sich jedoch nicht sicher angeben, wie weit diese Feststellung auf Zufall beruht; sie gewinnt an Wahrscheinlichkeit, da sich das gleiche Resultat auch für die zweite vergleichbare Wellenlänge ergibt.

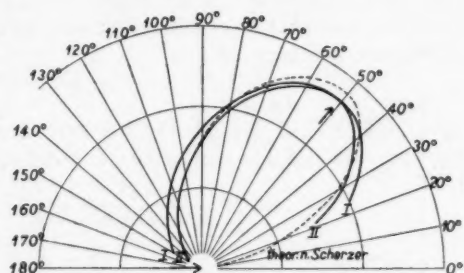
Durch Vergleich der von Kulenkampff und von mir gemessenen Verteilungskurven ist es direkt möglich, den von der Spannung und der Wellenlänge abhängigen Einfluß der Diffusion, wie er in der dickeren Al-Folie noch vorhanden ist, zu zeigen. Dabei spielt es für diese Betrachtungen keine Rolle, wenn das Aluminium durch Magnesium ersetzt wird. In Abb. 8 sind zu diesem Zwecke die an  $0,6 \mu$  starken Al-Folien (Kurve I) und die an  $< 0,1 \mu$  starken Mg-Folien (Kurve II) beobachteten Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge bei 20, 31 und 40 kV miteinander verglichen. Es zeigt



a)  $\lambda = 0,65 \text{ Å}$ ;  $V = 20 \text{ kV}$



b)  $\lambda = 0,43 \text{ Å}$ ;  $V = 31 \text{ kV}$



c)  $\lambda = 0,35 \text{ Å}$ ;  $V = 40 \text{ kV}$

Abb. 8. Einfluß der Diffusion in Abhängigkeit von der Spannung (Al-Folie  $0,6 \mu$ : Kurve I; Mg-Folie  $< 0,1 \mu$ : Kurve II)

Mg-Folien (Kurve II) beobachteten Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge bei 20, 31 und 40 kV miteinander verglichen. Es zeigt

sich, daß, wie zu erwarten ist, der Einfluß der Diffusion mit abnehmender Spannung ansteigt.

Ein ähnliches Bild ergibt sich beim Vergleich der Verteilungskurven der beiden Folien für verschiedene Wellenlängen bei konstanter Spannung, wie es für ein Beispiel in

Abb. 9 geschehen ist.

Der mit der Wellenlänge größer werden- de Einfluß der Streuung, der auf den Umstand zurückzuführen ist, daß die stark verlangsamten Elektronen, die bei der Emission der langwelligen Strahlung einen größeren Bruchteil ausmachen, auch stärker diffus geworden sind,

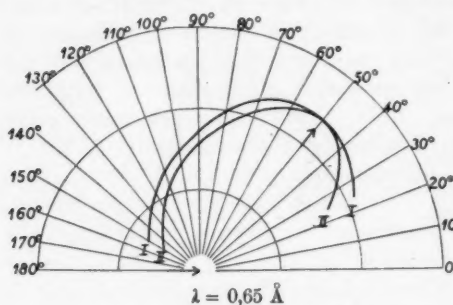


Abb. 9. Einfluß der Diffusion  
im langwelligen Gebiet bei 31 kV  
(Al-Folie 0,6  $\mu$ : Kurve I; Mg-Folie < 0,1  $\mu$ :  
Kurve II)

läßt die bei der Al-Folie mit fortschreitender Wellenlänge erhaltene Verbreiterung zu groß erscheinen.

Die theoretische Berechnung der Form der Verteilungskurven wurde im Anschluß an Sommerfeld unter Berücksichtigung relativistischer Glieder von Scherzer<sup>1)</sup> durchgeführt. Die in einem konstanten Raumwinkel und Frequenzbereich unter einem beliebigen Beobachtungswinkel  $\vartheta$  emittierte Strahlungsintensität ergibt sich für die Grenzwellenlänge zu

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{\nu} &= \frac{\alpha^4 Z^4 c^3 h^2 \cdot c}{(E - E_0)^2 \left( e^{\frac{2\pi\alpha Z}{\beta} - 1} \right)} \\ &\quad \cdot \sin^2 \vartheta \left[ \frac{2(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} + \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})(1 - 2\sqrt{1 - \beta^2})}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \right] \\ a &= \frac{2\pi e^2}{h \cdot c} \sim \frac{1}{137}; \quad E_0 = m_0 c^2; \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right.$$

Die hiernach berechneten Verteilungskurven, wie sie in Abb. 8 zum Vergleich gestrichelt eingetragen sind, stimmen mit den experimentellen Kurven (in Abb. 8 jeweils Kurve II) sowohl in der Lage des Maximums als auch in der Form sehr gut überein. Die bei den theoretischen

1) O. Scherzer, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 137. 1932.



Kurven etwas stärker ausgeprägten Intensitätsunterschiede sind wohl darauf zurückzuführen, daß man durch die Filtermethode nicht streng monochromatische Strahlung erhält.

## 2. Lage des Intensitätsmaximums

Bei den in Abb. 6 wiedergegebenen Kurven der Grenzwellenlänge in Abhängigkeit von der Spannung ist außer der Verbreiterung der Kurvenform deutlich das Voreilen des Intensitätsmaximums nach kleineren Winkeln für höhere Spannungen zu erkennen. Die erhaltenen Werte stimmen sehr gut mit den von Kulenkampff gemessenen überein, wie aus Abb. 10 ersichtlich ist. Der Einfluß der Diffusion ist also nicht so stark, daß die Lage des Maximums dadurch merklich gefälscht würde.

In Abb. 10 ist ferner der von Sommerfeld (a. a. O.) berechnete theoretische Verlauf des Maximums in Abhängigkeit von der Spannung eingetragen, gemäß der von Scherzer (vgl. Ann. d. Phys.) unter Berücksichtigung relativistischer Glieder berechneten Formel:

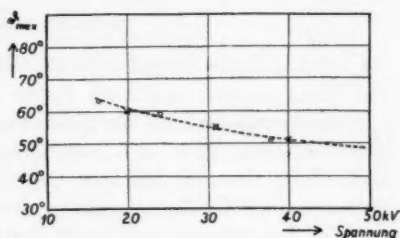


Abb. 10. Abhängigkeit der Lage des Maximums von der Spannung für die Grenzwellenlänge

○ Al-Folie 0,6  $\mu$   
 × Mg-Folie < 0,1  $\mu$   
 --- Sommerfeld

$$(3) \quad \cos \vartheta_{\max} = \frac{1}{2\beta_1} \left( \sqrt{1 + \frac{8\beta_1^2}{1-D}} - 1 \right);$$

hierin bedeuten  $\beta_1$  die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons in  $v/c$  Einheiten,  $D$  das Depolarisationsverhältnis, welches sich für die  $90^\circ$ -Richtung ergibt zu

$$(4) \quad D = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\beta_1 \cdot \beta_2} \ln \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - 1}{\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{2\beta_1 \cdot \beta_2} \ln \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + 1}.$$

Die Gleichung für  $\vartheta_{\max}$  enthält neben dem Voreilen des Maximums mit zunehmender Spannung ( $\beta_1$ ), auch die Verschiebung des Maximums nach kleineren Winkeln für größere Wellenlängen, die in dem Depolarisationsverhältnis  $D$  zum Ausdruck kommt. In Tab. 7 sind die berechneten und die aus dem Experiment erhaltenen Werte für  $\vartheta_{\max}$  zum Vergleich wiedergegeben.

Tabelle 7

| Spannung | Grenzwellenlänge $\lambda_0$ | Wellenlänge $\lambda_m$ | $\vartheta_{\max}$ |          |
|----------|------------------------------|-------------------------|--------------------|----------|
|          |                              |                         | exp.               | theoret. |
| 20 kV    | 0,618 Å                      | 0,65 Å                  | 60°                | 61°      |
|          |                              | 1,60 Å                  | 50°                | 41°      |
| 31 kV    | 0,398 Å                      | 0,43 Å                  | 55°                | 55°      |
|          |                              | 0,65 Å                  | 50°                | 49°      |
|          |                              | 1,60 Å                  | 40°                | 0° (!)   |
| 40 kV    | 0,309 Å                      | 0,35 Å                  | 51°                | 51°      |
|          |                              | 0,65 Å                  | 47°                | 35°      |

Die verglichenen Werte weisen hinsichtlich der Lage des Maximums für die Grenzwellenlänge oder einem benachbarten Wellenlängenbereich, so lange das Depolarisationsverhältnis  $D$  sehr klein ist, gute Übereinstimmung auf (vgl. auch Abb. 10 gestrichelte Kurve). Es treten jedoch zunehmende Abweichungen auf, je weiter man sich im langwelligen Teil des Spektrums befindet. Die Theorie ergibt ein zu rasches Voreilen des Intensitätsmaximums für längere Wellen. Für den Fall  $\lambda = 1,60 \text{ Å}$  und 31 kV würde formal Gl. (3) für  $\cos \vartheta_{\max}$  einen Wert  $> 1$  ergeben. Nach neueren Rechnungen von Elwert<sup>1)</sup> ist es jedoch zweckmäßig, nicht wie es Scherzer getan hat, nach  $\cos \vartheta$ , sondern nach  $\vartheta$  selbst zu differenzieren. Man erhält dann als Bedingungsgleichung für das Intensitätsmaximum

$$[(D - 1)(\beta \cos^2 \vartheta + \cos \vartheta) + 2\beta] \cdot \sin \vartheta = 0.$$

Hierin entspricht der Klammerausdruck der von Scherzer angegebenen Formel, man erhält daneben aber eine zweite Lösung und zwar  $\sin \vartheta_{\max} = 0$ , die dann zu wählen ist, wenn die einfache Gl. (3) versagt. Die Übergangsstelle liegt bei einem Wert  $D = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ , d. h. für die Spannung von 31 kV bei einer Wellenlänge  $\lambda = 1,2 \text{ Å}$ , also bereits bei einer merklich kürzeren Wellenlänge als  $1,60 \text{ Å}$ . Es hat also den Anschein, als ob das Depolarisationsverhältnis  $D$  mit zunehmender Wellenlänge nur in geringerem Maße ansteigt, als es durch Gl. (4) gegeben ist.

Die von Determann<sup>2)</sup> an einer massiven Be-Antikathode ausgeführten Messungen über die Richtungsverteilung der Bremsstrahlung

1) Für freundliche briefliche Mitteilung dieser Ergebnisse bin ich Herrn Elwert zu Dank verpflichtet.

2) H. Determann, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 481. 1937.

weisen im Vergleich zu meinen Messungen selbst bei hohen Spannungen (über 100 kV) verhältnismäßig geringe Intensitätsunterschiede auf, so daß man hieraus noch auf merkliche Diffusion schließen muß. Im übrigen besteht gute Übereinstimmung in bezug auf die Abhängigkeit der Lage des Intensitätsmaximums von der Spannung, so weit dies bei der stärkeren Diffusion erwartet werden kann.

#### E. Zusammenfassung

Die auf Grund verschiedener Beobachtungen aufgetauchte Vermutung, daß die von Kulenkampff an  $0,6 \mu$  starken Al-Folien erhaltene azimutale Intensitätsverteilung der Röntgenbremsstrahlung durch Diffusion und Geschwindigkeitsverlust noch gefälscht sind, ließ die Wiederholung der Messungen an noch dünneren Mg-Folien ( $< 0,1 \mu$ ) wünschenswert erscheinen. Die verwendeten Folien wurden wegen der geringen mechanischen Festigkeit derartiger Schichten durch Aufdampfen von Mg auf Zelluloidhäutchen hergestellt. Die durch die begrenzte Belastbarkeit der Folien bedingte geringe Intensität erforderte eine sehr empfindliche Nachweismethode; die Messung der Strahlung erfolgte deshalb mit einem Spitzenzähler.

In verschiedenen Meßreihen wurde 1. die Abhängigkeit der azimutalen Intensitätsverteilung von der Wellenlänge bei konstanter Spannung (für 20, 31 und 40 kV), 2. die Abhängigkeit von der Spannung (20, 31 und 40 kV) für die jeweilige Grenzwellenlänge und 3. die Abhängigkeit von der Spannung für eine konstante Wellenlänge ( $0,65 \text{ \AA}$ ) untersucht.

Die erhaltenen Verteilungskurven zeigen wie die älteren Messungen die starke Unsymmetrie und das mit zunehmender Kathodenstrahlenergie voreilende Maximum. Sie bestätigen die bereits von Kulenkampff an den dickeren Al-Folien beobachtete Abhängigkeit der spektralen Zusammensetzung vom Azimut. Infolge Ausschaltung von Diffusion und Geschwindigkeitsverlust sind bei den neuen Verteilungskurven die Intensitätsunterschiede größer; dieselben sind am stärksten an der kurzwelligen Grenze ausgeprägt. Aus dem Verlauf der Intensitätsverteilung für die Grenzwellenlänge ist deutlich zu erkennen, daß unter  $0$  unter  $180^\circ$  keine Intensität ausgestrahlt wird, während mit zunehmender Wellenlänge dieselbe bei kleinen und großen Azimuten allmählich ansteigt.

Die mit der Theorie verglichenen Verteilungskurven ergeben für einen nahe der Grenzwellenlänge befindlichen Wellenlängen-

bereich hinsichtlich der Lage des Maximums und der Kurvenform gute Übereinstimmung.

Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München begonnen, im Physikalischen Institut der Universität Jena fortgesetzt und zu Ende geführt. Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff bin ich für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit und für wertvolle Ratschläge besonders bei der Diskussion der Ergebnisse zu großem Dank verpflichtet, ferner Herrn Dozent Dr. Raether für vielfache Unterstützung.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, April 1938.

(Eingegangen 14. Juli 1938)

## **Messungen im langwelligen Ultrarotspektrum der Quarzquecksilberlampe<sup>1)</sup>**

**Von Bernhard Koch**

(Mit 13 Abbildungen)

Inhalt: A. Einleitung. — B. Meßanordnung: 1. Spektrometer und Strahlungsempfänger; 2. Die Beugungsgitter; 3. Filteranordnung. — C. Meßergebnisse: 1. Vergleich verschiedener Lampentypen, Einfluß der Betriebsbedingungen auf die Strahlungsintensität; 2. Einfluß der Gitter auf den Intensitätsverlauf im Spektrum; 3. Die Durchlässigkeit von geschmolzenem Quarz im Gebiet von 220–450  $\mu$ ; 4. Die Durchlässigkeit von LiF im Gebiet von 220–360  $\mu$ ; 5. Die Absorption der langwelligen Hg-Strahlung in einem zweiten Hg-Bogen; 6. Die Emission der Hg-Lampe in bezug auf den schwarzen Körper und die Frage des Ursprungs der Strahlung. — D. Zusammenfassung.

### **A. Einleitung**

Die durch Rubens und v. Baeyer<sup>2,3)</sup> entdeckte langwellige Ultrarotstrahlung der Quarzquecksilberlampe — das längstwellige bisher bekannte optische Spektrum — verdient aus zwei Gründen besondere Beachtung: Einmal läßt sich mit ihrer Hilfe ein Spektralbereich jenseits des mit dem Auerbrenner erreichbaren Gebietes untersuchen, andererseits der Mechanismus ihrer Entstehung auf Grund der bis heute bekannten Anregungs- und Emissionsvorgänge im Hg-Bogen nur schwer verstehen, so daß eine in jeder Hinsicht befriedigende Erklärung für den Ursprung dieses ausgedehnten Kontinuums — dessen Intensitätsmaxima von Rubens zu  $\lambda = 215 \mu$  und  $315 \mu$  festgelegt wurden — heute noch aussteht. Den bisher zuverlässigsten Hinweis in dieser Richtung stellt wohl die Auffassung von Franck und Grottrian<sup>4)</sup> dar, wonach es sich möglicherweise um das Rotationsschwingungsspektrum eines angeregten Hg<sub>2</sub>-Moleküls handelt, dessen Existenz durch die zahlreichen Arbeiten über die sichtbaren

1) D 11 (gekürzt).

2) H. Rubens, O. v. Baeyer, Berl. Ber. 1911, S. 339 u. 666.

3) H. Rubens, Dasselbst 1921, S. 8.

4) J. Franck u. W. Grottrian, Ztschr. f. Phys. 4. S. 89. 1921.

bzw. ultravioletten Banden der Quecksilberbogenentladung inzwischen völlig sichergestellt ist<sup>1)</sup>. Eine Unterstützung erfährt diese Hypothese in mancher Beziehung durch Untersuchungen von Kroebel<sup>2)</sup>, wonach im Sinne dieser Auffassung die Absorption der langwelligen Hg-Strahlung in Quecksilberdampf durch die Anwesenheit von metastabil angeregten ( $2^3P_0$ )-Atomen bedingt ist.

Wegen ihrer äußerst geringen Intensität wurden bisher fast ausschließlich die Eigenschaften der durch geeignete Aussonderungsmethoden isolierten langwelligen Gesamtstrahlung untersucht. So fand Laski<sup>3)</sup> bei Messungen an handelsüblichen Quecksilberlampen oberhalb einer relativ niedrigen Belastung (pro Zentimeter Bogenlänge gerechnet) einen nur noch unwesentlichen Intensitätsanstieg mit dieser. Dagegen ergab sich bei Kroebel (a. a. O.) an einer selbstgebauten Lampe mit besonders niedrigem Dampfdruck ein außerordentlich starker Anstieg der langwelligen Strahlung mit zunehmender Belastung. Somit bestand die Aussicht, mit einem ähnlich gebauten Lampenmodell ein genügend intensives *Spektrum* dieser Strahlung zu erhalten, um etwa Durchlässigkeitsmessungen an geeigneten Substanzen vornehmen zu können. Abgesehen von den Rubensschen Gittermessungen, bei denen die Ausschläge für einen derartigen Zweck zu gering waren, ist dieser Versuch bereits einmal mit Erfolg von Cartwright und Czerny<sup>4)</sup> unternommen worden, die mit Hilfe der spektral zerlegten langwelligen Hg-Strahlung den Dispersions- bzw. Absorptionsverlauf von NaCl und KCl bis etwa  $240\ \mu$  verfolgten; anschließend unternahm Cartwright<sup>5)</sup> Durchlässigkeitsmessungen an zahlreichen Substanzen bis zu der gleichen Wellenlänge. Die vorliegenden Untersuchungen knüpfen wesentlich an diese beiden Arbeiten an; die erstgenannte wird im folgenden mehrmals mit dem Zeichen Ca.-Cz. zitiert werden.

Es bestand in diesem Sinne die Aufgabe, nachzuprüfen, inwieweit durch Anwendung geeigneter Lampentypen bzw. durch Variation der Betriebsbedingungen bei ein und demselben Modell eine Verstärkung der langwelligen Strahlung zu erreichen war. Besonderes Interesse beanspruchte dabei die Untersuchung der in letzter Zeit zu großer Vollkommenheit entwickelten technischen Hg-Hoch- und Höchstdrucklampen.

1) Zusammenfassender Bericht bei W. Finkelburg, Phys. Ztschr. 34. S. 529. 1933.

2) W. Kroebel, Ztschr. f. Phys. 50. S. 114. 1929.

3) G. Laski, Ztschr. f. Phys. 10. S. 353. 1922.

4) C. H. Cartwright u. M. Czerny, Ztschr. f. Phys. 90. S. 457. 1934.

5) C. H. Cartwright, Daselbat S. 480.

## B. Meßanordnung

## 1. Spektrometer und Strahlungsempfänger

Für die Messungen wurde das bei Ca.-Cz. beschriebene Spektrometer in allen wesentlichen Teilen benutzt, so daß lediglich zur besseren Verständigung dessen Aufbau nochmals kurz besprochen und auf einige kleine Änderungen hingewiesen sei (Abb. 1).

Eine erste grobe Aussonderung der langwelligen Strahlung der in *L* befindlichen Hg-Lampe fand durch die Quarzlinse *Q* statt, die in der üblichen Weise das „langwellige Bild“ von *L* auf den Eintrittspalt *S*<sub>1</sub> entwarf<sup>1)</sup>, der sich im Brennpunkt des Hohlspiegels *H*<sub>1</sub> befand (*f* = 50 cm, *D* = 15 cm); in *G* befanden sich wahlweise verschiedene Gitter (bzw. für die Untersuchung der Gesamtstrahlung ein Planspiegel), durch deren Drehung um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse das in der Fokalebene von *H*<sub>2</sub> entstehende Spektrum am Aussonderungspalt *S*<sub>2</sub> vorbeigeführt werden konnte; ein kurzbrennweitiger Spiegel *H*<sub>3</sub> entwarf ein stark verkleinertes Bild dieses Spaltes auf das Auffängerblech der

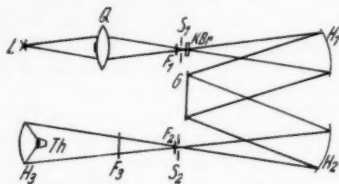


Abb. 1. Spektrometeranordnung

Vakuumthermosäule. An Stelle der bei Ca.-Cz. verwendeten Säule kam eine andere nach dem gleichen Gesichtspunkt gebaute, aus 2 Elementen (Bi)-(Bi + 5 % Sn) bestehende zur Anwendung; der innere Widerstand betrug etwa 45  $\Omega$ ; als Schwärzungsmittel für das 2  $\times$  5 mm große, isoliert auf beide Elemente aufgesetzte Empfängerblech wurde lediglich feines Glaspulver verwendet. Die Thermosäule war mit einem Fenster aus 1,5 mm starkem amorphen Quarz in Form einer nach außen konvexen Kugelkappe abgeschlossen. Für die Aufrechterhaltung des notwendigen Vakuums von wenigstens  $10^{-4}$  mm Hg über längere Zeiträume hat sich Silica-Gel bewährt: Nach dessen einmaliger, sorgfältiger Ausheizung bei 200° C an der Pumpe wies die Säule ohne weitere Vorkehrungen nach 4–6 Wochen noch 70–80 % ihrer Maximalempfindlichkeit auf. Ihre hohe Empfindlichkeit wurde allerdings zum Teil durch eine große Einstelldauer erkauft: In Verbindung mit einem Zernike-Galvanometer (*Zc*) von 14  $\Omega$  Widerstand waren nach 27 Sek. etwa 80 % des Endausschlages erreicht; trotzdem gelang es in besonders günstigen Abend- oder Nachtstunden die durchschnittlichen Nullpunktschwankungen bei einem Skalenabstand von 5,40 m während der für die Nullpunktskorrektur notwendigen Ableszeit von 54 Sek. auf nahezu 0,1 mm herabzudrücken. Das Galvanometer

1) Man hat bei Anwendung einer einzigen Quarzlinse — wie auch die nähere Durchrechnung ergibt — infolge des hohen Brechungsindex immer mit großen sphärischen Fehlern zu rechnen. Deshalb wurde auch versucht, eine Isolierung der langwelligen Anteile durch direkte Hohlspiegelabbildung unter Zwischenschaltung zweier TlJ-Reststrahlplatten zu erreichen. Doch stellten die hiermit erzielten Resultate — besonders wegen der noch zusätzlich erforderlichen Filterung — keinen Fortschritt gegenüber der Quarzlinse dar.



befand sich hierbei auf einer auch gegen Luftzug geschützten erschütterungsfreien Aufstellung nach dem Vorbild von Müller<sup>1)</sup>.

## 2. Die Beugungsgitter

Die hier verwendeten Laminargitter<sup>2)</sup> ergeben innerhalb eines gewissen Spektralbereiches gegenüber einem normalen Reflexionsgitter einen beträchtlichen Intensitätsgewinn — theoretisch um den Faktor 4 —; man hat dafür jedoch einen entscheidenden Einfluß auf den spektralen Intensitätsverlauf in Kauf zu nehmen. Wenn man auch wegen der Schwierigkeit der Herstellung eines „idealen“ Laminargitters von vornherein mit gewissen Abweichungen vom theoretischen Verhalten zu rechnen hat, empfiehlt es sich trotzdem, sich einigermaßen quantitativ Rechenschaft über diesen Faktor zu geben, um an Hand der mit verschiedenen Gittern erhaltenen Spektren derselben Strahlungsquelle zu einem Urteil über die Zuverlässigkeit der spektralen Zerlegung gelangen zu können. Das hier vorliegende Problem ist kürzlich in großer Allgemeinheit auf Grund der Kirchhoffschen Beugungstheorie behandelt worden<sup>3)</sup>. Für unsere Zwecke reicht jedoch eine speziellere Überlegung völlig aus: Die Rechnung — auf deren genauere Wiedergabe hier verzichtet sei — zeigt, daß zu der bekannten Intensitätsformel für ein gewöhnliches Reflexionsgitter, bei dem je ein reflektierender Streifen der Breite  $a/2$  ( $a$  = Gitterkonstante) abwechselte mit einem nicht reflektierenden Streifen gleicher Breite, beim Laminargitter mit einheitlichem Reflexionsvermögen noch der Faktor

$$4 \cdot \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{\lambda} \left[ \frac{a}{2} (\sin \alpha - \sin \beta) - h (\cos \alpha + \cos \beta) \right] \right\}$$

hinzutritt; dabei ist also angenommen (Abb. 2), daß an Stelle der nicht reflektierenden Streifen Lamellen der Höhe  $h$  getreten sind,  $\alpha$  und  $\beta$  sind Einfallswinkel bzw. Beugungswinkel. Ein Spektrum konstanter Intensität erscheint daher in 1. Ordnung mit dem Faktor

$$4 \cdot \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2\lambda} (\lambda - 4h) \right\}$$

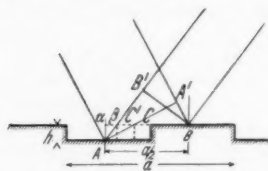


Abb. 2. Laminargitter

„moduliert“ (mit genügender Näherung kann  $\cos \alpha = \cos \beta = 1$  gesetzt werden).

Es standen drei derartige Laminargitter zur Verfügung, von denen das eine bereits bei Ca.-Cz. verwendet worden war. Um wenigstens einen qualitativen Vergleich mit einem unverzerrten Spektrum anstellen zu können, wurde außerdem noch ein normales Reflexionsgitter hergestellt: An Stelle der Lamellen wurden Streifen aus Löschpapier (als Absorptionsmaterial mit möglichst geringem Reflexionsvermögen) auf einen im Hochvakuum mit Al bedampften Planspiegel aufgeklebt; die mit diesem Gitter erzielten Resultate waren durchaus befriedigend.

1) R. Müller, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 613. 1929.

2) R. M. Badger, Journ. Opt. Soc. Am. 15. S. 370. 1927; R. M. Badger u. C. H. Cartwright, Phys. Rev. 33. S. 693. 1929; C. H. Cartwright, Journ. Opt. Soc. Am. 21. S. 785. 1931.

3) K. H. Hellwege, Ztschr. f. Phys. 106. S. 588. 1937.

Im folgenden die Daten dieser vier Gitter:

| Gitter                    | $a$ in mm | $h$ in $\mu$ | $N^1)$ | Dispersion in<br>1. Ordn. in $\mu/\text{mm}$ |
|---------------------------|-----------|--------------|--------|--|
| I                         | 3,9       | 45           | 30     | 7,5  |
| II                        | 6,2       | 75           | 18     | 12   |
| III                       | 6,0       | 110          | 18     | 11,5   |
| IV<br>(Löschpapiergitter) | 6,2       | —            | 18     | 12   |

Das Verhalten der vier benutzten Gitter auf Grund der letzten Formel geht aus Abb. 3 hervor; es wurde das Intensitätsmaximum

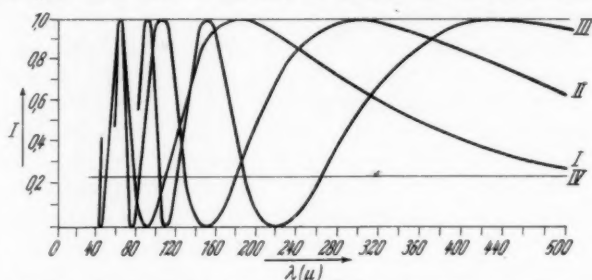


Abb. 3. Berechneter Intensitätsverlauf im Spektrum 1. Ordnung der benutzten Gitter (I, II und III Laminargitter, IV einfaches Gitter)

für jedes der drei Laminargitter jeweils gleich 1 gesetzt, das „Löschpapiergitter“ erhält in diesem Maß somit die konstante Intensität 0,25. Es liegen also die bei Messungen im ganz langwelligen Teil des Hg-Spektrums unter Umständen störenden — weil in 3. Ordnung ebenfalls verstärkten — Wellenlängengebiete alle unterhalb von  $150 \mu$ , wo die Filterwirkung des Quarzes in Verbindung mit weiteren unter 3. beschriebenen Filtern noch ausreicht, um Strahlung aus diesem Gebiet genügend zu unterdrücken; ihre Intensität beträgt in bekannter Weise in 3. Ordnung nur  $\frac{1}{9}$  derjenigen in 1. Ordnung und ist außerdem bei unveränderter Spaltbreite nochmals um den Faktor 3 verringert. In der Tat traten auch bei den Messungen keinerlei Erscheinungen auf, die auf eine Mitwirkung der 3. Ordnung hätten schließen lassen.

### 3. Filteranordnung

Außer dem amorphen Quarzfenster der Vakuumthermosäule (S. 337) dienten folgende Filter zur Vorzerlegung: Vor dem Eintrittsspalt befand sich (Abb. 1) eine undurchsichtige Rußschicht, die verhinderte, daß die trotz der Abdeckung der mittleren Partien der

1)  $N$  = Zahl der Gitterelemente.

Quarzlinse mit einem 2 mm dicken Paraffinstreifen noch auf den Spalt fallende kurzwellige Strahlung in das Spektrometer eindrang. Hinter dem Aussonderungsspalt befanden sich bei  $F_2$  drei zu einem Filtersatz zusammengefaßte Zaponlackmembrane, auf die im Hochvakuum je eine wenige  $\mu$  dicke Schicht NaCl, KCl und CsCl aufgedampft war. Diese Filterkombination erstreckte ihre Wirkung in der Hauptsache auf das Gebiet von 80—150  $\mu$ , wo bereits der amorphe Quarz merklich durchlässig wird, andererseits die Strahlung der heißen Quarzwände noch recht intensiv ist; aus Abb. 3 ergibt sich ferner, daß alle 3 Laminargitter in diesem Bereich Intensitätsmaxima aufweisen, so daß seine Unterdrückung durch besondere Filter geraten erscheint. Die Absorption des Filtersatzes betrug bei 100  $\mu$  etwa 50%, bei etwa 220  $\mu$  hat seine Wirksamkeit nahezu ihr Ende erreicht, so daß mit seiner Hilfe insbesondere auch eine Kontrolle des 300  $\mu$ -Bereiches auf Verunreinigung durch die 3. Ordnung des 100  $\mu$ -Bereiches möglich war. Als weitere Filter befanden sich unmittelbar hinter diesem Filtersatz noch eine 2 mm dicke Paraffinplatte sowie bei  $F_3$  eine weitere dünne Paraffinmembran, die durch Eintauchen einer großflächigen Zaponlackmembran in flüssiges Paraffin gewonnen wurde.

Als erste grobe Reinheitskontrolle diente der nach Einführung einer 6 bzw. 9 mm dicken NaCl-Platte in den Strahlengang verbleibende Restausschlag. Aus den Messungen von Ca.-Cz. kann man extrapolieren, daß ein solcher Restausschlag noch nicht auf die bei ganz langen Wellen erhöhte Durchlässigkeit des NaCl zurückzuführen ist, da diese — ungestörten Verlauf des Extinktionskoeffizienten vorausgesetzt — bei den angegebenen Schichtdicken erst bei 500  $\mu$  knapp 10% erreichen würde; vielmehr konnte er immer auf Strahlung unterhalb etwa 20  $\mu$  zurückgeführt werden. Tatsächlich ergab sich jedoch nur bei Verwendung von Lampen mit besonders starker Quarzstrahlung bzw. geheizten Quarzrohren noch ein Restausschlag von etwa 5—8% der langwelligen Gesamtstrahlung; er ging bei Messungen an Lampen mit geringerer Wandtemperatur unter jeden mit Sicherheit meßbaren Betrag zurück — insbesondere ergab sich dann bei Ersetzung der halbdurchlässigen Unterbrechungsklappe (KBr) durch einen völlig undurchlässigen Schirm keine Vergrößerung der Ausschläge mehr.

Weiterhin wurden im Spektrum selbst laufend Durchlässigkeitskontrollen an verschiedenen dicken Platten aus geschmolzenem Quarz durchgeführt, da dessen Absorption — im Gegensatz zum kristallinen Quarz — in dem untersuchten Spektralbereich noch genügend wellenlängenabhängig ist. Die befriedigende Übereinstimmung dieser Werte

sowohl unter sich als auch mit den späterhin mitzuteilenden systematisch durchgeführten Absorptionsmessungen bot ausreichende Gewähr für die saubere spektrale Zerlegung.

### C. Meßergebnisse

#### 1. Vergleich verschiedener Lampentypen, Einfluß der Betriebsbedingungen auf die Strahlungsintensität

Es handelte sich zunächst darum, genauer festzustellen, inwieweit seitens einer Hg-Lampe des bei Ca.-Cz. benutzten Typs nach Sołtan<sup>1)</sup> spezifische Quecksilberdampfstrahlung emittiert würde. Bei diesem Modell brennt der Bogen in einer Kapillare von etwa 2 mm innerem Durchmesser und 2 mm Wandstärke gegen Atmosphärendruck.

„Abschaltmessungen“ nach dem Vorbild von Rubens konnten wegen der großen Trägheit des Empfängers nur in der Form durch-

geführt werden, daß nach Abschalten des Bogens lediglich ein Ausschlag gemessen wurde, der somit ein Maß für die untere Grenze der Quarzstrahlung darstellte; größere Zuverlässigkeit als derartige

„Abschaltmessungen“ bietet ein direkter Vergleich mit einem geheizten Quarzrohr: Hierzu wurde ein von innen mittels einer Pt-Wendel erhitztes Quarzrohr, dessen Abmessungen mit

denen der Kapillare der Hg-Lampe übereinstimmten, benutzt. Die Stromstärke im Pt-Draht betrug etwa 7 Amp. bei einer Gesamtbelastung von etwa 70 Watt; die Stromstärke in der Lampe betrug 0,28 Amp., die Bogenspannung etwa 140 Volt; das entspricht einer Belastung von ~13 Watt pro Zentimeter Bogenlänge. Die mit Gitter I erhaltenen Spektren dieser beiden Strahlungsquellen enthält Abb. 4. (Diese Darstellung zeigt gleichzeitig noch die Wirksamkeit des auf S. 340 beschriebenen Filtersatzes.) Als Ordinate ist, wie in allen weiteren

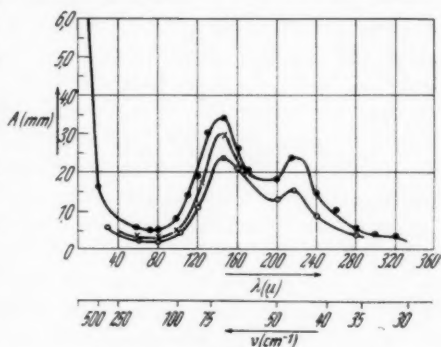


Abb. 4. Emissionsspektren.

|           |                      |              |
|-----------|----------------------|--------------|
| — · — · — | Kapillarenlampe ohne | } Filtersatz |
| — x — x — | „ mit                |              |
| — ○ — ○ — | Quarzrohr ohne       |              |

1) A. Sołtan, C. R. Soc. Pol. Phys. 4. S. 301. 1929.

Millimeter<sup>1)</sup>, als Abszisse die Wellenlänge in  $\mu$ , bzw. die Wellenzahl in  $\text{cm}^{-1}$  aufgetragen. Die Breite der Spektrometerspalte entsprach einem Intervall von etwa  $30 \mu$ . Jedem Meßpunkt ist als Mittelwert aus drei Ausschlägen ein mittlerer Fehler von  $\pm 0,15 \text{ mm}$  zuzuschreiben.

Man erhält schon aus dieser Abbildung einen Überblick darüber, in welcher Weise die Gestalt des Spektrums durch die Filter und das Gitter beeinflusst wird: Das erste Maximum bei  $150 \mu$  ist zweifellos auf die Zunahme der Durchlässigkeit der kristallinen Quarzschicht der Linse zurückzuführen, z. T. vielleicht auch auf deren aussondernde Wirkung, da sie auf Grund eines Brechungsindex von 2,15 einjustiert wurde; das zweite Maximum deutet auf ein gegenüber den Kurven der Abb. 3 nach längeren Wellen hin verschobenes längstwelliges Gittermaximum hin, was für die Messungen unwesentlich ist und seine Erklärung in einer nicht genügend einheitlichen Furchentiefe findet.

Das wesentliche Ergebnis ist, daß eine starke Emission des Hg-Dampfes bei dieser Lampe nicht auftritt. Die Werte der Hg-Lampe liegen zwar im ganzen Verlauf des Spektrums höher als die des Quarzrohres, es muß dabei aber berücksichtigt werden, daß dessen Temperatur sicher niedriger war, als die der Wände des Brenners. Eine genauere Temperaturbestimmung schien angesichts der Schwierigkeiten, die sie bereitet hätte, nicht lohnend. Zur Orientierung sei mitgeteilt, daß nach Abschalten des Bogens sich die Kapillare auf heller Rotglut befand, während die geheizte Kapillare bei der oben angegebenen Belastung gerade begann, im Sichtbaren zu emittieren; man wird den Temperaturunterschied in beiden Fällen auf etwa  $100-150^\circ$  ansetzen dürfen. In der Tat gelang es auch, durch noch stärkere, kurzzeitige Belastung des Pt-Drahtes in einigen Meßpunkten die Ausschlagswerte des Hg-Brenners fast zu erreichen. Ferner muß berücksichtigt werden, daß die Rückwand des Quarzrohres durch die Wendel mit verschwindendem Emissionsvermögen teilweise abgedeckt wurde.

In Verbindung mit den bei „Abschaltemessungen“ der beschriebenen Art erhaltenen Restausschlägen darf man aus dieser Gegenüberstellung mit Sicherheit folgern, daß bei einer Lampe dieser Bauart an keiner Stelle des langwelligeren Spektrums die spezifische Hg-Strahlung mehr als 25% der jeweiligen Gesamtstrahlung ausmacht. Das zweite, längstwellige, von Rubens nachgewiesene Emissionsmaximum bei  $320 \mu$  konnte überhaupt nicht mit Zuverlässigkeit beobachtet werden.

Von Wichtigkeit schien somit ein Vergleich mit einer nach dem Vorbild von Kroebel (a. a. O.) gebauten Lampe mit niedrigem Dampfdruck, deren Konstruktion aus Abb. 5 hervorgeht:

1) Skalenabstand  $5,40 \text{ m}$ .

Bei A ist der Quarzteil der Lampe an ein Steigrohr aus Glas angekittet, das mit einem Hg-Gefäß in Verbindung steht. Das zweite in dieses Gefäß einmündende Steigrohr steht über einen Hahn mit der Außenluft bzw. einer Pumpe in Verbindung, mittels derer sowohl der Druck in der Lampe (gemessen durch die Höhe des in I stehendem Hg) geregelt, als auch die Lampe selbst auf Hochvakuum gepumpt werden konnte. Die Wandstärke betrug 1 mm. Die Belastung dieser Lampe konnte in weiten Grenzen variiert werden, unter Umständen durch Anwendung verschiedenen starker Kühlung der Quarzkugel. Die Maximalbelastung betrug bei besonderer Ventilationskühlung bei einem Maximaldruck von  $\sim 470$  mm Hg etwa 400 Watt  $\sim 80$  Watt/cm. Dabei betrug die Stromstärke bis zu 6,5 Amp., die Spannung bis zu 60 Volt.

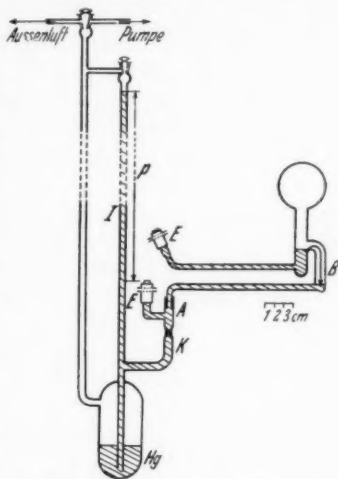


Abb. 5. Hg-Dampf Lampe, die unter verschiedenen Drucken brennen kann.

B Hg-Bogen; E Elektroden mit Wasserkühlung; K Kapillare zur Stabilisierung der Entladung

Zunächst sei in Abb. 6 das unter gleichen Bedingungen wie oben (zunächst ohne Filtersatz) gewonnene Spektrum dieser Lampe bei einer mittleren Belastung von 200 Watt = 40 Watt/cm dargestellt. Als Vergleich dient das mit einem, von innen mittels einer Sauerstoff-Leuchtgasflamme auf Rotglut gebrachten Quarzrohr gleicher Abmessung erhaltene Spektrum; die Eigenstrahlung dieser Flamme

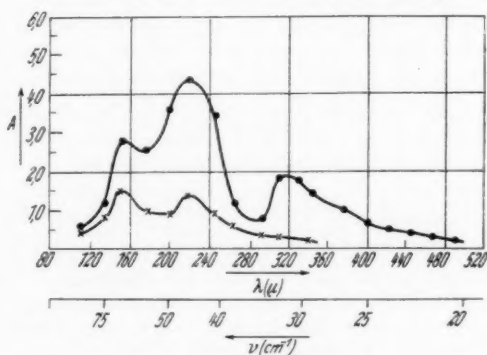


Abb. 6. Emissionsspektren.

— — — — Hg-Lampe

— x — x — Quarzrohr, durch Sauerstoff-Leuchtgasflamme auf Rotglut gebracht

konnte dabei vernachlässigt werden. Die beiden ausgeprägten Maxima bei  $220\ \mu$  und  $310\ \mu$  stehen in guter Übereinstimmung mit den von Rubens angegebenen Werten. Darüber hinaus ließ sich das Spektrum noch nach wesentlich längeren Wellen hin verfolgen, worüber späterhin noch einiges zu sagen sein wird. Außer diesen beiden Maxima tritt aber auch hier noch ein kürzerwelliges bei  $150\ \mu$  auf, das z. T. sicherlich auf die oben erwähnten Ursachen zurückzuführen ist. Andererseits besteht schon an diesem Punkt zwischen den beiden Vergleichsspektren ein wesentlich größerer Intensitätsunterschied als bei den Spektren der Abb. 4, obwohl hier die Temperatur des geheizten Quarzrohres eher höher gelegen haben dürfte, als die des Lampenkörpers<sup>1)</sup>. Offensichtlich besteht also auch in diesem kürzerwelligen Gebiet eine selektive Emission des Quecksilberdampfes, wie dies schon Rubens vermutete. Ferner erkennt man am Verlauf des Quarzrohrspektrums, in welcher Weise sich das Gittermaximum auf eine Überhöhung des  $200\ \mu$ -Bereiches gegenüber dem  $300\ \mu$ -Bereich auswirkt.

Das wesentliche Ergebnis der weiteren mit dieser Lampe durchgeführten Versuche war nun, daß bei einer Steigerung der Belastung über den diesen Messungen zugrunde liegenden Wert bis an die oben angegebene Höchstgrenze *keine* wesentliche Intensitätszunahme mehr auftrat<sup>2)</sup>, vielmehr ergab sich schon oberhalb von etwa  $25\ \text{Watt/cm}$  nur noch eine geringe Steigerung<sup>3)</sup>, während unterhalb dieses Wertes eine stärkere Abnahme mit der Belastung erfolgte.

Dieses Ergebnis konnte auch nicht durch Änderung des bei unveränderten Kühlverhältnissen eindeutigen Zusammenhangs zwischen Druck und Belastung durch Anwendung verschieden starker thermischer Isolierung insbesondere der Quarzkugel wesentlich beeinflußt werden.

Aus den in dieser Richtung unternommenen Versuchen ergab sich lediglich, daß in diesem Druckbereich von  $180\text{--}470\ \text{mm Hg}$  ein im Verhältnis zur Belastung hoher Druck die Intensität der langwelligen Strahlung in geringem

1) Die geringere Absolutintensität der Quarzstrahlung gegenüber den Messungen der Abb. 4 ist auf die geringere Dicke der Quarzschicht zurückzuführen, die im Fall der Abb. 4 mit  $4\ \text{mm}$  anzusetzen ist, während sie hier höchstens  $2\ \text{mm}$  betrug.

2) Leider enthält die Arbeit von Kroebel (a. a. O.) in diesem Punkt keine genaueren Angaben, so daß nicht einwandfrei entschieden werden kann, bei welcher der *Längeneinheit* des Bogens zugeführten Leistung der starke Intensitätsanstieg auftrat. Es läßt sich lediglich an Hand einer Konstruktionsskizze abschätzen, daß dies bei  $40\text{--}60\ \text{Watt/cm}$  gewesen sein dürfte, also etwa im gleichen Bereich, in dem die oben mitgeteilten Messungen durchgeführt wurden.

3) Die Konstruktion der Lampe ließ „Abschaltmessungen“ nicht zu, so daß nicht entschieden werden konnte, ob diese geringe Intensitätssteigerung nicht lediglich durch eine Erhöhung der Wandtemperatur verursacht wurde.



Maße begünstigt (so daß also z. B. bei zwei Meßpunkten mit annähernd gleicher Belastung die Intensität etwas erhöht war, wenn in einem Fall durch Vergrößerung der Kühlung der Druck höher lag als im andern Fall). Eine systematische Verfolgung dieses Effektes bot jedoch wegen seiner Geringfügigkeit kein besonderes Interesse und könnte wohl erst bei Messungen über einen größeren Druckbereich, als er hier zur Verfügung stand, von Wert sein.

Für die hier verfolgten Ziele erschien es wesentlicher, Vergleiche mit handelsüblichen Quecksilberlampen durchzuführen, insbesondere den neuerdings entwickelten Hg-Hoch- und Höchstdrucklampen<sup>1)</sup>.

Es gelangte zunächst ein kleineres Modell<sup>2)</sup> zur Verwendung, das bei einer Bogenlänge von 30 mm eine Gesamtbelastung von etwa 170 Watt bei einer Stromstärke von 1,5 Amp. aufwies. Der

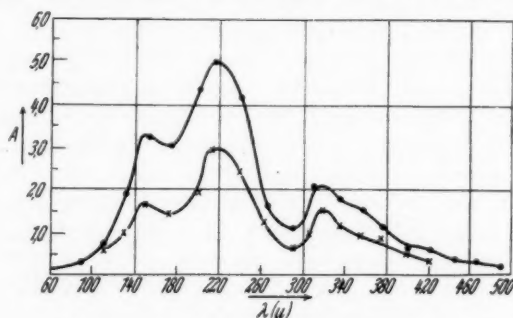


Abb. 7. Emissionsspektren.

— · — · — Osram-Brenner HgH 500  
— x — x — Heraeus-Brenner

Innendruck dieser Lampe liegt bei einigen Atmosphären; im Gegensatz zu den bisher besprochenen Modellen ist im stationären Zustand kein flüssiges Hg mehr vorhanden.

Als weiterer Vergleich wurde ein 110-Volt Kipp-Brenner von Heraeus bei 2 Amp. und 80 Volt ( $\sim 20$  Watt/cm) untersucht; das Ergebnis ist in Abb. 7 enthalten. Bemerkenswert ist die Übereinstimmung des von der HgH 500-Lampe emittierten Spektrums mit demjenigen der oben beschriebenen Eigenkonstruktion; die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Belastung wurde in diesem Fall wegen der bekannten Empfindlichkeit aktivierter Elektroden gegen Fehlbelastung nicht untersucht. Aus diesem Grunde läßt sich nicht entscheiden, ob die geringe Überlegenheit gegenüber der Eigenkonstruktion eine prinzipielle Eigenschaft dieses Lampentyps

1) Zu den im folgenden benutzten technischen Hg-Lampen vgl. das Buch über „Elektrische Gasentladungslampen“ von W. Uytendhoeven, Berlin 1938.

2) Osram HgH 500.

ist; ein zweites gleichartiges Modell lieferte jedoch nur etwa ebenso große Ausschläge wie die in Abb. 5 dargestellte Lampe.

Demgegenüber wies der Heraeusbrenner im ganzen Spektrum eine geringere Absolutintensität auf, was wohl nur zum Teil auf die geringere Belastung von 20 Watt/cm zurückzuführen ist. Der Hauptgrund dürfte in der größeren Wandstärke zu suchen sein, die mit etwa 2 mm anzusetzen ist. Einmal spricht dafür die Tatsache, daß der Unterschied nach längeren Wellen hin geringer wird, und zweitens war nach Abschalten des Bogens der Restausschlag an allen Stellen des Spektrums wesentlich größer als bei dem HgH 500-Brenner (bei  $220\ \mu$  z. B. 40% gegen 25%).

Die drei zuletzt besprochenen Typen stimmten bezüglich der äußeren Abmessungen der emittierenden Partien nahezu überein, was wegen der fehlerhaften Abbildung durch die Quarzlinse für einen direkten Vergleich wesentlich ist. Dagegen wiesen die im folgenden behandelten Lampen auch äußerlich größere Verschiedenheiten auf, so daß sie sich zu einer unmittelbaren Gegenüberstellung nicht eignen.

Zunächst seien die mit einer Hg-Höchstdrucklampe (HgB 500)<sup>1)</sup> erhaltenen Resultate mitgeteilt: Der Anwendung dieser Lampe stehen als experimentelle Schwierigkeiten einmal ihre außerordentlich starke Emission im Sichtbaren bzw. kurzwelligen Ultrarot, dann aber besonders ihre starke Wärmeentwicklung und die dadurch bedingten beträchtlichen thermischen Störungen im Galvanometerkreis entgegen. Trotz Anwendung aller möglichen Schutzmaßnahmen konnten daher die Messungen an dieser Lampe nicht mit der gleichen Zuverlässigkeit durchgeführt werden wie die bisher mitgeteilten. Trotzdem ergab sich mit Sicherheit, daß — zunächst absolut genommen — die von diesem Modell emittierte langwellige Strahlung etwa nur halb so intensiv war wie die z. B. mit der HgH 500-Lampe erhaltene und zudem noch zu einem viel höheren Prozentsatz von den außerordentlich heißen, 3 mm starken Quarzwänden herrührte. Für die unzerlegte langwellige Gesamtstrahlung betrug der Restausschlag nach Erlöschen noch etwa 70%<sup>2)</sup>, bei  $220\ \mu$  noch annähernd 60%, bei  $320\ \mu$  noch 40%, während die mit der HgH 500-Lampe in einem Vergleichsversuch erhaltenen entsprechenden Werte sind: 25, 21, 16%. Unter Berücksichtigung der kleineren Bogenlänge von 6 mm und der wesentlich stärkeren Quarzwände darf man aus diesen

1) R. Rompe u. W. Thouret, Ztschr. f. techn. Phys. 17. S. 377. 1936; Belastung 750 Watt/cm, Innendruck etwa 50 Atm.

2) Hier war noch 5 Minuten nach Erlöschen ein deutlich meßbarer Restausschlag nachzuweisen.

Ergebnissen jedenfalls schließen, daß bei derartigen Höchstdrucklampen die Leuchtdichte in diesem langwelligen Gebiet nicht größer ist als bei normalen Hochdrucklampen. Ihre Anwendung bietet also für derartige Messungen keine Vorteile.

Ein wesentlich günstigeres Resultat wurde dagegen mit der ebenfalls in letzter Zeit entwickelten Quecksilbernormallampe<sup>1)</sup> erzielt. Die Normalbelastung dieser Lampe beträgt etwa 25 Watt/cm bei 1,65 Amp. Ihre Strahlungsintensität im langwelligen Spektralbereich war bei gleicher zur Messung gelangender Bogenlänge den mit den anderen Typen gewonnenen Resultaten mindestens gleichwertig. Die infolge des größeren Durchmessers (20 mm) geringere Temperatur der Quarzwände bewirkt, daß die Quarzstrahlung dieser Lampe gegenüber den anderen untersuchten Modellen am niedrigsten liegt; für die Gesamtstrahlung betrug nach Abschalten der Restausschlag weniger als 20%. Obwohl die Normallampe besonders oberhalb von etwa 350  $\mu$  eine deutlich meßbare Überlegenheit aufwies, stimmte im großen und ganzen doch das von ihr emittierte Spektrum mit den in Abb. 6 und 7 enthaltenen Spektren der HgH 500-Lampe und der Eigenkonstruktion überein.

Aus diesen mit verschiedenen Lampentypen erhaltenen Ergebnissen läßt sich nur schwer ein Parameter ableiten, der unabhängig von der speziellen Konstruktion allein maßgebend wäre für die in diesem langwelligen Gebiet etwa pro Zentimeter Bogenlänge abgestrahlte Intensität. So läßt sich sicher auch nicht die auf S. 344 gefundene geringe Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Verhältnis Druck zu Leistung verallgemeinern, wie schon ein Vergleich mit den an der Kapillarenlampe erhaltenen Ergebnissen zeigt, wo dieses Verhältnis einen ähnlichen Wert besitzt wie bei der Lampe HgH 500.

Bemerkenswert erscheint die unerwartete Übereinstimmung von Lampen mit recht verschiedenen Betriebsdaten. Da der Vergleich zwischen Vakuumbrennern mit flüssigem Hg und Edelgaslampen mit aktivierten Elektroden angesichts dieser Übereinstimmung gerechtfertigt erscheint, darf man aus den mitgeteilten Ergebnissen mit einiger Sicherheit folgern, daß die Intensität der langwelligen Hg-Strahlung oberhalb einer Belastung von 20—25 Watt/cm nur in geringem Maß von Druck und der Belastung abhängt. (Die Höchstdrucklampe HgB 500 muß wegen der nicht ohne weiteres in Rechnung zu setzenden Einflüsse ihres abweichenden Aufbaus aus dieser Betrachtung ausscheiden, ebenso die Kapillarenlampe, bei der anscheinend die starke Einengung der Entladungsbahn besondere Verhältnisse bedingt.)

1) H. Krefft, F. Rössler u. A. Rüttenauer, Ztschr. f. tech. Phys. 18. S. 20. 1937.

Das vom experimentellen Standpunkt wichtigste Ergebnis dieser Vergleichsmessungen ist, daß durch sie Modelle von Hg-Lampen ausfindig gemacht wurden, die in Verbindung mit bequemer Handhabung und guter Konstanz der langwelligen Strahlung noch ein genügend intensives Spektrum liefern, mit dem sich z. B. quantitative Absorptionsmessungen durchführen lassen.

## 2. Einfluß der Gitter auf den Intensitätsverlauf im Spektrum

Im folgenden soll kurz auf die Beeinflussung des spektralen Intensitätsverlaufes durch die verschiedenen Gitter eingegangen werden:

Zunächst ist in Abb. 8 das mit dem (Normal-)Gitter IV erhaltene Spektrum der HgH 500 Lampe (die allen folgenden Messungen zugrunde liegt, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist) in nochmaligem Vergleich mit

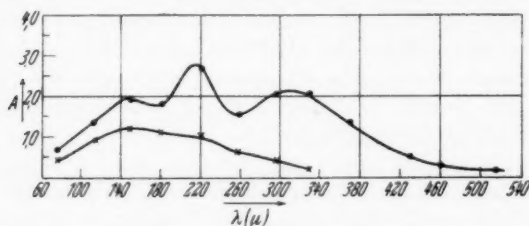


Abb. 8. Emissionsspektrum der HgH 500-Lampe (---) und des geheizten Quarzrohres mit dem einfachen Gitter IV

dem geheizten Quarzrohr dargestellt; Abb. 9 zeigt dasselbe Spektrum mit den drei Laminargittern. Dabei ist zu beachten, daß in Abb. 8 die Breite der Spektrometerspalte einem Spektralintervall von etwa  $50 \mu$  entspricht; trotzdem ist also der charakteristische Verlauf des Spektrums noch recht deutlich. Bei der Gegenüberstellung in Abb. 9 wurden die Spaltbreiten im umgekehrten Verhältnis der Gitterkonstanten verändert, so daß bei jedem der drei Spektren jeweils wieder ein Spektralintervall von  $\sim 30 \mu$  zur Messung gelangte. Trotz der großen äußeren Verschiedenheit der drei Spektren ergibt eine Rechnung — deren genauere Wiedergabe kein besonderes Interesse besitzt — an Hand der Abb. 3 (selbst ohne Berücksichtigung der endlichen Spaltbreite) eine annähernde Übereinstimmung. Die restlichen Abweichungen lassen sich zwanglos besaß und andererseits auch die mit verschiedenen Gittern bei ein und derselben Wellenlänge durchgeführten Durchlässigkeitsmessungen an Quarz und LiF (vgl. die folgenden Nr. 3 und 4) in guter Übereinstimmung untereinander standen. Die Spektren dieser Abbildung, die ohne den Filtersatz (S. 340) aufgenommen wurden, zeigen nochmals, daß sich dessen Anwendung wegen der im  $100 \mu$ -Gebiet wirksamen Gittermaxima sicherheitshalber empfiehlt.

Diese Messungen lassen es aussichtsreich und wünschenswert erscheinen, bei weiteren Untersuchungen zu Gittern mit größerer Dispersion und dafür weiteren Spektrometerspalten überzugehen, da bei einem Verhältnis Wellenlänge: Spaltbreite = 1:10, wie es hier etwa vorlag, infolge von Beugungserscheinungen naturgemäß unrationelle Intensitätsverluste auftreten müssen.

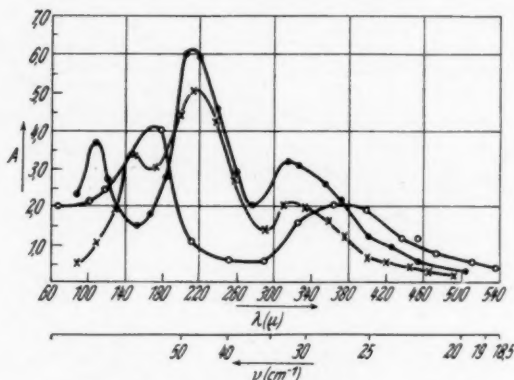


Abb. 9. Emissionsspektrum der HgH 500-Lampe mit drei verschiedenen Laminar-Gittern.

—x—x— Gitter I, — · · · — Gitter II, —○—○— Gitter III

### 3. Die Durchlässigkeit von geschmolzenem Quarz im Gebiet von 220—450 $\mu$

Auf Grund der bisher mitgeteilten Ergebnisse ließen sich systematische Absorptionsmessungen an zwei Substanzen durchführen, die in dieser Hinsicht besonderes Interesse beanspruchen: Zunächst geht aus allen bisher vorliegenden Untersuchungen über die langwellige Hg-Strahlung hervor, daß die Absorptionswirkung des geschmolzenen Quarzes diesen als Filtersubstanz für diesen Spektralbereich besonders geeignet erscheinen lassen. Aus den Messungen von Cartwright (a. a. O.) ergibt sich der Durchlässigkeitsverlauf bis zu einer Wellenlänge von etwa 240  $\mu$ ; somit schien es von Interesse, die Messungen von dieser Stelle aus fortzusetzen.

Die Ergebnisse finden sich in Abb. 10. Es gelangten drei Platten mit den Dicken 1,01, 1,92 und 4,16 mm zur Anwendung, die hinter dem Aussonderungsspalt  $S_2$  in den Strahlengang eingeführt wurden. Mit besonderer Kennzeichnung sind außerdem Punkte eingetragen, die mit Hilfe des den Cartwrightschen Messungen entnommenen Mittelwertes für den Absorptionsindex berechnet wurden. Man erkennt die gute Übereinstimmung in dem in Frage kommen-

den Gebiet von 150—220  $\mu$ . Um die Genauigkeit zu erhöhen, wurden jeweils die Mittelwerte von 10 Ausschlägen miteinander verglichen. Um einen Überblick über die den einzelnen Werten zuzuschreibenden mittleren Fehler zu geben, sind an einigen Punkten mehrere Werte gleicher Genauigkeit eingetragen, die entweder mit verschiedenen

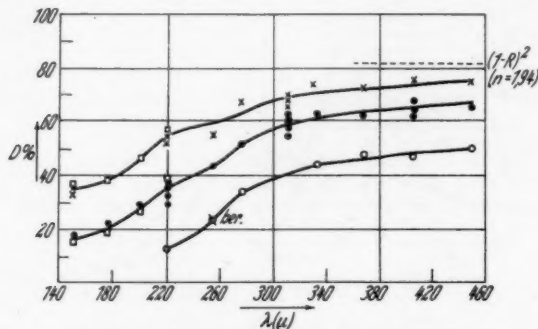


Abb. 10. Durchlässigkeit von amorphem Quarz.

—×—×— 1,01 mm    —○—○— 4,16 mm  
— · · · — 1,92 mm    —□—□— nach Cartwright

Gittern oder im Verlauf der Messungen unter 1. mit verschiedener Filteranordnung — also z. B. mit oder ohne Filteransatz — gewonnen wurden.

Da auf eine gesonderte Bestimmung des Brechungsindex und des Absorptionsindex aus experimentellen Gründen verzichtet wurde, konnte eine Aussage über diesen letzteren nur dadurch gewonnen werden, daß der Brechungsindex in diesem ganzen Gebiet als konstant = 1,94 angesetzt wurde<sup>1)</sup>.

In dieser Weise wurde Abb. 11 gewonnen, und zwar ist  $k$  hier definiert durch die Formel

$$D = (1 - R)^2 e^{-\frac{4\pi k d}{\lambda}} \quad \text{mit} \quad R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Es müssen hier einige Bemerkungen Platz finden über die Ausdehnung des Spektrums nach langen Wellen: Wie man an Abb. 11 erkennt, bleibt  $k$  von 360  $\mu$  an konstant; dem entspricht der von diesem Punkt an nur noch geringfügige Anstieg der Durchlässigkeit. Deren Wert kann von hier an nicht mehr als eindeutige Kontrolle für die Güte der spektralen Zerlegung gelten. Andererseits folgt aus der Tatsache allein, daß bei allen vier Gittern, wie man aus den Abb. 8 und 9 erkennt, bis zu einer Wellenlänge von 0,5 mm

1) C. Schaefer-F. Matossi, Das ultrarote Spektrum, Berlin 1930. S. 110.

reelle Ausschläge auftraten, noch nicht einwandfrei, daß etwa falsche Strahlung auszuschließen ist, wenn auch das Abbrechen des Spektrums bei nahezu der gleichen Wellenlänge bei allen vier Gittern eine solche Verfälschung unwahrscheinlich macht. Ausschließen läßt sich

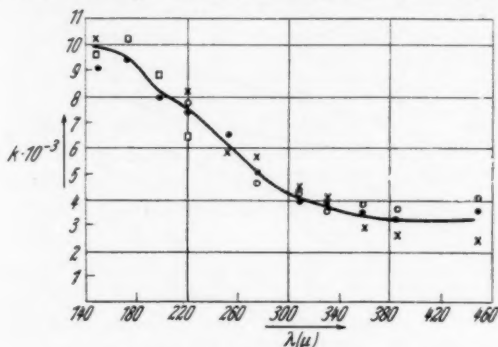


Abb. 11. Absorptionsindex  $k$  von amorphem Quarz berechnet aus den entsprechend gekennzeichneten Punkten der Abb. 10<sup>1)</sup>

mit Sicherheit die Vermutung, daß die Meßpunkte oberhalb von  $360 \mu$  durch die 3. Ordnung des  $120-170 \mu$ -Bereiches gefälscht sein könnten, da sich dann einmal im Spektrum der Gitter I und II ein Intensitätsanstieg bis etwa  $660 \mu$  zeigen müßte, oberhalb von  $540 \mu$  bis zu einer Wellenlänge von  $1 \text{ mm}$  jedoch keinerlei meßbarer Ausschlag mehr festgestellt werden konnte. Ferner hätte sich eine solche Verfälschung sofort in einem starken Abweichen der  $k$ -Werte vom tatsächlich gemessenen Verlauf bemerkbar gemacht. Für die Tatsache einer Erstreckung des Hg-Spektrums bis zu Wellenlängen von  $500 \mu$  spricht ferner die Erscheinung, daß das nach Abb. 3 bei  $450 \mu$  wirksame Gitter III in diesem Bereich in der Tat eine merkliche Verstärkung der Strahlungsintensität ergab (Abb. 9), so daß es mit seiner Hilfe möglich war, den letzten meßbaren Ausschlag bei  $540 \mu$  zu erhalten<sup>2)</sup>.

1) Anm. bei der Korrektur: Die Ordinate muß die Bezeichnung:  $k \cdot 10^3$  tragen.

2) Es soll hier von einem Vergleich mit den Ergebnissen von Nichols und Tear (Astrophys. Journ. 61. S. 17. 1925) abgesehen werden, da diese Arbeit in dem sich mit der Strahlung der Hg-Lampe befassenden Teil einige Unstimmigkeiten aufweist, auf die z. T. schon Kroebl (a. a. O.) hingewiesen hat. — Die in Kayser's Handbuch der Spektroskopie, 7. S. 663. 1934 enthaltene Bemerkung über eine theoretische langwellige Grenze des Hg-Spektrums bei  $2735 \mu$  nach Hales, Phys. Rev. 27. S. 809. 1926 beruht auf einem Mißverständnis: In dieser Notiz („Long Wavelength Limit of Mercury“) handelt es sich um eine Bestimmung der langwelligen Grenze des Photoeffektes an Hg-Oberflächen, die zu  $2735 \text{ \AA}$  gefunden wird.



4. Die Durchlässigkeit von LiF im Gebiet von 220–360  $\mu$ 

Leider war es aus Intensitätsgründen nicht möglich, diese Frage durch entsprechende Messungen an Lithiumfluorid bis zu der gleichen

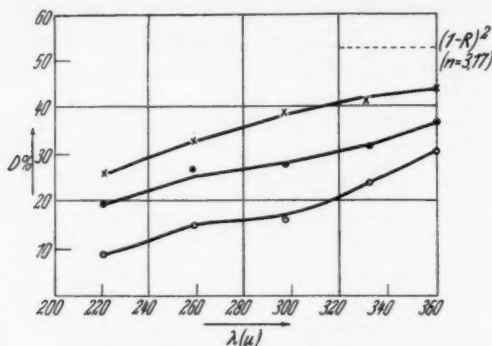


Abb. 12. Durchlässigkeit von LiF.

—x—x— 0,91 mm, —•—•— 1,39 mm, —○—○— 2,39 mm

Wellenlänge mit genügender Sicherheit zu klären; sie erstrecken sich nur bis zu einer Wellenlänge von 360  $\mu$  und wurden durch-

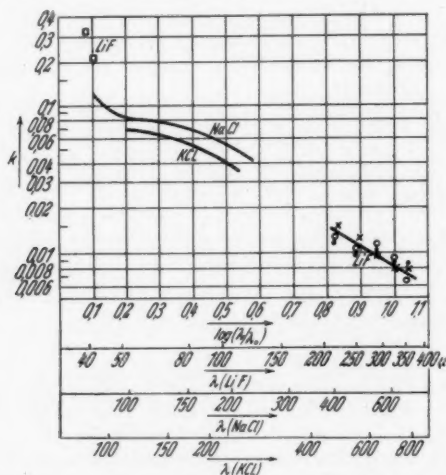


Abb. 13. Absorptionsindex von LiF aus den entsprechend gekennzeichneten Punkten der Abb. 12 (□ Werte nach Hohls) im Vergleich mit NaCl und KCl nach Cartwright und Czerny

geführt an drei Platten mit den Dicken 0,91, 1,39 und 2,39 mm (Abb. 12). Um die Berechnung des Absorptionsindex durchführen

zu können, wurde der Brechungsindex als konstant zu  $3,17 \sim \sqrt{10}$  angenommen, da nach Hohls<sup>1)</sup> der Brechungsindex von LiF schon bei etwa  $50 \mu$  einen der statischen Dielektrizitätskonstante entsprechenden Wert angenommen hat.

Es wurde hier eine Darstellung gewählt, wie sie bei Ca.-Cz. angewandt wurde, um die Gesetzmäßigkeiten im Verlauf des Extinktionskoeffizienten von NaCl und KCl besser hervortreten zu lassen (Abb. 13). Dazu sind auf der Abszisse nicht die Wellenlängen  $\lambda$  selbst, sondern die relativen Wellenlängen  $\lambda/\lambda_0$  in logarithmischem Maßstabe aufgetragen.  $\lambda_0$  bedeutet die ultrarote Eigenwellenlänge des betreffenden Materials, beim LiF  $32,6 \mu^2$ . In diese Darstellung sind ferner aufgenommen der bei Ca.-Cz. angegebene Verlauf für NaCl und KCl, sowie zwei von Hohls gemessene Werte bei 39 und  $41 \mu$ . Die bisher vorhandenen Meßpunkte lassen also auch in diesem Fall eine Bestätigung des bei den Alkalihalogeniden bisher aufgefundenen Parallelismus vermuten.

#### 5. Die Absorption der langwelligen Hg-Strahlung in einem zweiten Hg-Bogen

Fernerhin erschien es von Interesse, die von Kroebel mit der unzerlegten langwelligen Gesamtstrahlung durchgeführten Messungen auch mit der spektral zerlegten Strahlung anzustellen.

Die Versuche wurden in der Form durchgeführt, daß die HgH 500-Lampe, (im folgenden als Emissionslampe EL. bezeichnet) mittels eines Hohlspiegels in die Normallampe (Absorptionslampe AL.) abgebildet wurde, die sich ihrerseits in Normalstellung vor der Quarzlinse befand. Zunächst wurde der Ausschlag bestimmt, den die E.-Lampe bei kalter A.-Lampe hervorrief; dieser betrug wegen der starken Absorptionswirkung der zweimal zu durchdringenden Quarzwände der A.-Lampe für die unzerlegte Gesamtstrahlung nur etwa 25 % des Wertes, wenn sich diese Lampe gar nicht im Strahlengang befand. Daraufhin wurde die A.-Lampe gezündet und im stationären Zustand der durch beide Lampen hervorgerufene Ausschlag gemessen. Im Anschluß hieran wurde die Strahlung der E.-Lampe sorgfältig abgeschirmt und der durch die A.-Lampe allein verursachte Ausschlag gemessen, daraufhin nochmals der durch beide Lampen entstehende. Dieser Alternativversuch wurde mehrmals wiederholt und schließlich von einem Zeitpunkt unmittelbar nach Abschalten der A.-Lampe an etwa 10 weitere Ausschläge (jetzt also von der E.-Lampe und der allmählich abklingenden Quarzstrahlung

1) H. W. Hohls, Ann. d. Phys. [5] 29. S. 433. 1937.

2) R. B. Barnes, Ztschr. f. Phys. 75. S. 732. 1932.

der A.-Lampe hervorgerufen) verfolgt. Diese MeBreihe wurde sowohl mit der unzerlegten langwelligen Gesamtstrahlung als auch im Spektrum bei 220 und 310  $\mu$  durchgeführt.

Das Ergebnis ist in leichtverständlicher Bezeichnung in folgender Tabelle enthalten. Die Zahlen stellen abgesehen von den in der letzten Rubrik enthaltenen Einzelausschlägen (über die dort eingeklammerten Werte vgl. später) immer Mittelwerte von 10 Ausschlägen dar.

|                 | EL.  | EL. u.<br>AL. | AL.   | EL. u.<br>AL. | AL.   | EL. u.<br>AL. | A.-Lampe aus   |
|-----------------|------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|--|
| Gesamtstrahlung | 4,24 | 22,5          | 21,33 | 22,68         | 21,23 | 22,47         | 7,4; 6,7; 6,4;<br>5,3; 5,3; 5,0;<br>4,8; [4,55; 4,0;<br>4,36; 4,1; 4,4]            |
| 220 $\mu$       | 0,91 | 5,17          | 4,88  | 5,04          | 4,90  | 5,10          | 1,7; 1,54; 1,3;<br>1,23; 1,2; [1,12;<br>1,05; 1,1; 1,0;<br>1,05; 1,1; 1,2;<br>1,0] |
| 310 $\mu$       | 0,63 | 2,87          | 2,87  | 3,01          | 2,94  | 2,97          | 1,0; 0,95; 1,1;<br>[0,7; 0,85; 0,6;<br>0,9; 1,0; 0,75;<br>0,95; 0,60]              |

Außerdem wurde in gesonderter Messung mit der A.-Lampe allein der den drei MeBreihen entsprechende Restausschlag nach Erlöschen des Bogens bestimmt; er ergab sich der Reihe nach zu 3,4; 0,8; 0,1 mm. Sieht man in der letzten Rubrik von der jeweiligen Klammer an den Ausschlag als konstant an und bildet aus den darauffolgenden Werten das Mittel, so ergibt sich in genügender Übereinstimmung wieder der in Spalte 2 stehende Ausschlagswert der E.-Lampe. Die Differenz des jeweils ersten Ausschlages nach Erlöschen der A.-Lampe gegen diesen Mittelwert beträgt der Reihe nach 3,12; 0,62; 0,2 mm, stimmt also innerhalb der Meßgenauigkeit mit den oben angegebenen Restausschlägen überein. Daraus kann in Verbindung mit den Erfahrungen über die gute Konstanz der Strahlung einmal gefolgert werden, daß auch in der Zwischenzeit die Intensität der E.-Lampe sich nicht geändert hat; andererseits ergibt sich, daß der heiße Quarz der A.-Lampe keine meßbar verstärkte Absorption gegenüber Zimmertemperatur aufweist. Diese Tatsache ist bis zu einer Temperatur von 300° C durch Messungen explizit bestätigt<sup>1)</sup>, ferner bei einer Temperatur von 500° C als

1) H. Rubens u. G. Hertz, Berl. Ber. 1912, S. 256.

ebenfalls noch gültig gefunden<sup>1)</sup>, und wird durch das mitgeteilte Verhalten bei der sicher nicht sehr viel höheren Temperatur des Lampenkörpers wohl außer Zweifel gestellt.

Es ergibt sich also im Fall der unzerlegten Strahlung, daß der im Mittel 4,26 mm betragende Ausschlag der Emissionslampe denjenigen der Absorptionslampe nur um etwa 1,32 mm verstärkt; daraus folgt, daß etwa 70 % der Strahlung der Emissionslampe in der Absorptionslampe absorbiert wurden, und zwar auf Grund obiger Überlegungen im Bogen selber. Bei der zweiten Meßreihe ergibt sich in gleicher Weise eine Absorption von rund 80 %, während bei 310  $\mu$  überhaupt keine sicher meßbare Verstärkung der Strahlung der A.-Lampe durch die der E.-Lampe stattfand. Doch reicht die Meßgenauigkeit nicht aus, um aus diesem Ergebnis einen eindeutigen Schluß auf etwaige verschieden starke Absorption der drei Wellenlängengebiete zu ziehen; mit Sicherheit läßt sich lediglich feststellen, daß die langwellige Strahlung der Quecksilberlampe mindestens zu 70 % in einem zweiten Hg-Bogen absorbiert wird. Dieses Ergebnis steht in bemerkenswerter Übereinstimmung mit den von Kroebe! gewonnenen Resultaten<sup>2)</sup>.

#### 6. Die Emission der Hg-Lampe in bezug auf den schwarzen Körper und die Frage des Ursprungsortes der Strahlung

Es soll nun noch eine Abschätzung der vom Bogen bei einer bestimmten Wellenlänge abgestrahlten Leistung in bezug auf die Flächenhelligkeit des schwarzen Körpers bei der gleichen Wellenlänge durchgeführt werden:

Da ein geeigneter schwarzer Körper nicht zur Verfügung stand, wurde diese Abschätzung durchgeführt an Hand der Abb. 6; da der Quarz noch ein genügend hohes Absorptionsvermögen besitzt, das nach den Messungen der Abb. 10 bekannt ist, konnte aus der Intensität der Strahlung des geheizten Quarzrohres die Strahlung eines schwarzen Körpers mit ausreichender Sicherheit extrapoliert werden; sie ergibt sich durch Division des betreffenden Quarzrohrausschlages mit

$$1 - e^{-Kd} = 1 - \frac{D}{(1 - R)^2}$$

1) H. Rubens u. A. v. Wartenberg, Verh. Deutsch. Phys. Ges. XIII. S. 796. 1911.

2) Der Versuch, ob die Strahlung auch in den kälteren Randpartien der Entladung in gleichem Maße absorbiert wird, ließ sich wegen der starken Reflexionsverluste bei der dann notwendigen Abbildung auf stark gekrümmte Wandpartien nicht durchführen.

für die betreffende Wellenlänge, und zwar wurde wegen der fehlerhaften Abbildung durch die Quarzlinse die Dicke der emittierenden Quarzschicht zu 2 mm angenommen. Wenn man ferner noch annimmt, daß das Quarzrohr der Hg-Lampe im gleichen Maß strahlt (was durch die annähernde Übereinstimmung der Restausschläge nach Erlöschen des Bogens mit den Quarzrohrausschlägen bei 220 und 320  $\mu$  gerechtfertigt erscheint), so gibt in Abb. 6 die Differenz zwischen Hg-Lampen- und Quarzrohrspektrum ein Maß für die spezifische Quecksilberstrahlung. Dieser Wert ist noch zu korrigieren auf die Durchlässigkeit der 1 mm starken Vorderwand des Brenners, um ein Maß für die tatsächlich vom Bogen emittierte Strahlung zu erhalten. Die Temperatur des Quarzrohres wurde dabei mit  $\sim 1100^\circ$  abs. angenommen. Für 200  $\mu$  ergibt sich auf diese Weise für die Flächenhelligkeit des Bogens im Verhältnis zu derjenigen eines schwarzen Körpers von etwa  $1100^\circ$  abs. der Wert 2,5. Bei 320  $\mu$  ergibt sich dieser Faktor zu 1,6. Diesen Zahlen kommt sicher nur größenordnungsmäßige Bedeutung zu, wie aus ihrer Ableitung ersichtlich ist; insbesondere darf man aus ihrer Verschiedenheit noch nicht auf eine Verschiedenheit der schwarzen Temperaturen bei den beiden Wellenlängen schließen. Trotzdem läßt sich aus ihnen entnehmen, daß die Leuchtdichte des Hg-Bogens im langwelligen Gebiet diejenige eines schwarzen Körpers von  $3000^\circ$  abs. an keiner Stelle des Spektrums wesentlich übertrifft und im Durchschnitt etwa einer schwarzen Temperatur von  $2500^\circ$  abs. gleichzusetzen ist.

Mit Hilfe des Rayleigh-Jeansschen Gesetzes läßt sich auf Grund dieses Wertes eine größenordnungsmäßige Abschätzung der absoluten Strahlungsleistung des Bogens durchführen; sie ergibt sich für ein Wellenlängenintervall  $d\lambda = 20 \mu$  bei  $\lambda = 200 \mu$  zu

$$2 \cdot E_\lambda \cdot d\lambda = 2 \cdot \frac{c k}{\lambda^4} \cdot T \cdot d\lambda = 300 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}.$$

Die strahlende Fläche des Bogens ist mit 10  $\text{cm}^2$  anzusetzen, so daß sich hieraus für die Strahlungsleistung die Größenordnung von  $3 \cdot 10^{-4}$  Watt ergibt.

Die Energie eines Lichtquants der Wellenlänge 0,2 mm beträgt annähernd  $10^{-14}$  erg. Daraus folgt schließlich für die Zahl der vom Bogen emittierten Lichtquanten die Größenordnung von  $10^{17} \text{ sec}^{-1}$ .

Um über den Ursprungsort der Strahlung in der Entladung experimentelle Anhaltspunkte zu erhalten, wurde versucht, aus der Normallampe, die sich wegen ihres großen Querschnittes für einen derartigen Versuch gut eignete, durch einen 3 mm breiten Spalt,

der sich unmittelbar vor der Lampe befand, einmal die Mitte der Entladung mit der kontrahierten Säule und ein zweites Mal unter Abdeckung dieser Partien nur die seitlichen Teile zur Abbildung auf den Spektrometerspalt zu bringen. Dabei ergab sich — die Versuche wurden nur mit der unzerlegten langwelligen Gesamtstrahlung unternommen — daß bei Abbildung des eingeschnürten Entladungskanal die Ausschläge um den Faktor 2,5—3 höher lagen, als wenn lediglich die Randpartien zur Messung gelangten. Dieses Ergebnis läßt zunächst insofern keinen eindeutigen Schluß zu, als sich ja vor der Achse der Entladung noch eine etwa 5 mm starke Schicht kälteren Dampfes befindet und andererseits die von den Seitenteilen der Entladung ausgehende Strahlung größere Reflexionsverluste erleidet, als die von den zentralen Teilen aus die Quarzwand nahezu in Normalenrichtung durchsetzende Strahlung. Das experimentelle Ergebnis zeigt jedenfalls, daß zur Beobachtung bevorzugt diejenige Strahlung gelangt, die aus der Richtung der Achsenteile der Entladung emittiert wird<sup>1)</sup>. Dieses Ergebnis findet sich im Grunde genommen schon bei Rubens<sup>2)</sup>, der im Fall verkleinerter Abbildung des gesamten Lampenquerschnittes auf den Spektrometerspalt nur eine unwesentliche Intensitätserhöhung gegenüber einer vergrößerten Abbildung (bei gleicher Apertur) nur der zentralen Teile erhielt.

Bemerkenswert für die Diskussion dieser Frage erscheint noch die Beobachtung, daß im Verlauf des Einbrennens des Bogens die zunächst nur wenig intensive langwellige Strahlung in dem Augenblick anzuwachsen beginnt, als auch der Beginn der Kontraktion des Bogens zu bemerken ist. Während dieses Einbrennvorganges steigert sich allerdings auch die Belastung; es wurden jedoch zwei Punkte beobachtet, an denen bei verschiedenen Stromstärke- und Spannungswerten die Belastung annähernd die gleiche war. Dabei trat im Fall der höheren Spannung, also verstärkter Kontraktion der Säule, ein um 70% höherer Ausschlag auf als im Fall geringerer Kontraktion.

#### D. Zusammenfassung

Es wird berichtet über Messungen, die mit Hilfe von Laminargittern an Quecksilberlampen verschiedener Konstruktion durchgeführt wurden, und die einen Überblick über die in bezug auf Messungen im langwelligen Spektrum des Hg-Dampfes günstigsten Modelle liefern. Es ergibt sich bei Hochdrucklampen ähnlicher äußerer

1) Für die sichtbaren bzw. ultravioletten Hg-Banden ist die Frage kürzlich in eindeutiger Weise im Sinn einer bevorzugten Emission seitens der Randpartien geklärt worden: E. Fischer u. H. König, Phys. Ztschr. 39. S. 313. 1938.

2) H. Rubens, Berl. Ber. 1921, S. 8.

Abmessung, aber unter verschiedenen Betriebsbedingungen, eine weitgehende Übereinstimmung des langwelligen Spektrums. Das Spektrum läßt sich bis zu Wellenlängen von 0,5 mm verfolgen.

Ferner wird die Durchlässigkeit von geschmolzenem Quarz und Lithiumfluorid bis zu Wellenlängen von 450 bzw. 360  $\mu$  gemessen.

Weiterhin wird die Absorption der langwelligen Strahlung in einer zweiten Hg-Lampe untersucht; der Befund starker Absorption steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren an angeregtem Hg-Dampf.

Schließlich wird eine Abschätzung der schwarzen Temperatur der Strahlung und der absoluten Strahlungsleistung gegeben sowie Beobachtungen über den Ursprungsort in der Entladung mitgeteilt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. Czerny, der vorstehende Untersuchungen veranlaßte, habe ich für seine tatkräftige Förderung bestens zu danken, ebenso Herrn Dozent Dr. W. Orthmann für seine Unterstützung. Zu danken habe ich ferner dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. A. Wehnelt für die Bereitstellung eines Teils der Instrumente (deren anderer Teil Herrn Prof. Dr. M. Czerny durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft und die Helmholtz-Gesellschaft zur Verfügung gestellt war), Frau Prof. Dr. L. Meitner (Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem) für die Überlassung eines Zernike-Galvanometers, der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung (Osram) für mehrere Quecksilberlampen, sowie Herrn Dr. R. Rompe für einige wertvolle Diskussionen.

Berlin NW 7, I. Physikalisches Institut der Universität, im März 1938.

(Eingegangen 11. Juli 1938)



## Beiträge zur Theorie der schweren Atomkerne<sup>1)</sup>

### I. Zur Frage des Neutronenüberschusses in den schweren Atomkernen

Von Erich Bagge

(Mit 11 Abbildungen)

Es wird nach einem bis zur Störungsenergie zweiter Ordnung entwickelten Näherungsverfahren unter Zugrundelegung eines Gausspotentials für die Wechselwirkung der Kernbausteine die *Abhängigkeit der Bindungsenergie der schweren Atomkerne vom Neutronenüberschuß* berechnet. Bei geeigneter Wahl von Stärke, Reichweite und Spin-Ladungsabhängigkeit der Kräfte läßt sich diese mit der von der Weizsäcker-Betheschen halbempirischen Theorie der Massendefekte geforderten in Übereinstimmung bringen.

#### § 1. Fragestellung. Die Sättigungsbedingungen

Die aus dem empirischen Verlauf der Massendefekte ablesbare Eigenschaft der *Sättigung der Kernkräfte* wurde in neueren Arbeiten dazu benutzt, für die von Breit und Feenberg<sup>2)</sup> vorgeschlagenen ladungsinvarianten Kräfte zwischen den Kernbausteinen gewisse, von diesen Autoren bereits diskutierte, einschränkende Beziehungen, die sogenannten *Sättigungsbedingungen*, aufzustellen. Diese müssen nach Untersuchungen von Volz<sup>3)</sup> und Kemmer<sup>4)</sup> mindestens näherungsweise erfüllt sein, wenn man dem nahezu linearen Anstieg der Bindungsenergie mit wachsender Teilchenzahl richtig Rechnung tragen will.

Weiterhin müssen die Kräfte so gewählt sein, daß Kerne, die aus einer einzigen Teilchensorte, etwa nur aus Neutronen zusammengesetzt sind, nicht stabil sein können. Nimmt man noch an, daß das *Thomas-Fermi-Modell* wenigstens größenordnungsmäßig den *Neutronenüberschuß* richtig wiedergibt, dann lassen sich die im allgemeinen Ansatz von Breit und Feenberg noch möglichen Kraftkombinationen soweit einschränken, daß für die dort auftretenden, frei verfügbaren Parameter bereits sehr enge Grenzen gezogen sind.

Kemmer fügte den bisher besprochenen die weitere Bedingung hinzu, daß Wechselwirkungen, für welche Atomkerne mit lauter

1) D 15, I. Teil.

2) G. Breit u. E. Feenberg, Phys. Rev. **50**. S. 850. 1936.

3) H. Volz, Ztschr. f. Phys. **105**. S. 537. 1937; vgl. auch E. Feenberg, Phys. Rev. **52**. S. 667. 1937.

4) N. Kemmer, Nature **140**. S. 192. 1937.

parallel gerichteten Teilchenspins stabiler sein könnten als andere mit etwa gleichen Anzahlen entgegengesetzter Spins, auszuschließen sind, weil in der Natur offenbar nur die letzteren vorkommen.

Dadurch wurde die Freiheit in der Wahl der Kräfte, die man nach der Volzschen Bestimmung ihres *zulässigen Wertebereichs* noch hatte, weiter eingeengt. Es lag deshalb nahe, sich zunächst für eine solche unter den noch erlaubten Kraftkombinationen zu entscheiden, die möglichst einfache mathematische Eigenschaften besitzt.

Nun sind einerseits von Feenberg<sup>1)</sup> Bedenken gegen die Verwendbarkeit des *Thomas-Fermi-Modells* zur Herleitung von Sättigungsbedingungen erhoben worden. Insbesondere sollte nach diesem Verfahren der Neutronenüberschuß so schlecht beschrieben werden, daß es nicht erlaubt ist, daraus Schlüsse auf die Kräfte zu ziehen.

Andererseits gibt es gegen die von Kemmer eingeführte Bedingung zur Verhinderung der „*Spinkatastrophe*“ gewisse später erörterte Einwände, die ihr den scheinbar zwingenden Charakter nehmen.

In dieser Arbeit soll deshalb versucht werden, nach einem von Euler<sup>2)</sup> zuerst angewendeten, gegenüber der *Thomas-Fermi-Methode verbesserten Verfahren*, den *Neutronenüberschuß der schweren Kerne* erneut zu berechnen und das Ergebnis mit dem entsprechenden bisherigen zu vergleichen. Es wird sich dabei zeigen, daß die sich so ergebenden Korrekturen in ihrem Verhältnis zum *Thomas-Fermi-Glied* zwar von der Spinladungsabhängigkeit mitbestimmt sind, sie jedoch für die überhaupt noch in Betracht kommenden Kräfte unter einer gewissen Grenze bleiben. Diese erweist sich als so klein, daß man umgekehrt den berechneten Neutronenüberschuß als ein Kriterium für die Brauchbarkeit der Kräfte verwenden kann. Daraus lassen sich dann Aussagen über die möglichen Spinladungsabhängigkeiten der Kräfte herleiten, die in § 7 im einzelnen besprochen werden.

## § 2. Die Wechselwirkung der Protonen und Neutronen

Für die Wechselwirkungsenergie der Kernbausteine werde in den folgenden Rechnungen der Breit-Feenberg'sche ladungs-invariante Ansatz zunächst in einer Form zugrunde gelegt, wie er für spätere Diskussionen geeignet ist:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{ik} = A e^{-\left(\frac{r_i - r_k}{a}\right)^2} \frac{1}{2} & \left[ -2a_2 - a_4 - (2a_2 - a_4)(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k) \right. \\ & \left. - \left(2a_2 - a_4 + \frac{1}{4}\right)(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k) + \left(\frac{7}{12} + \frac{2}{3}a_2 - a_4\right)(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k)(\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k) \right]. \end{aligned} \right.$$

1) E. Feenberg. Phys. Rev. 52. S. 758. 1937.

2) H. Euler, Ztschr. f. Phys. 105. S. 553. 1937.

$A$  ist ein Maß für die Stärke und  $a$  für die Reichweite der Kernkräfte. Der eckige Klammerausdruck gibt die Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie von Spin und Ladungseinstellung an und  $\vec{\sigma}$  bzw.  $\vec{\rho}$  sind die entsprechenden *Paulischen Matrizen*. Die in (1) auftretenden Linearkombinationen der dimensionslosen Größen  $a_2$  und  $a_4$  sind so gewählt, daß  $V_{ik}$  unabhängig von ihrem Werte im Falle des Deuterons  $((\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \rightarrow 1; (\vec{\rho}_1 \vec{\rho}_2) \rightarrow -3)$  übergeht in:

$$V_{12}^D = -A e^{-\left(\frac{r_1 - r_2}{a}\right)^2},$$

dagegen für die gegenseitige Spinladungseinstellung, wie sie bei Streuexperimenten auftritt  $((\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \rightarrow -3; (\vec{\rho}_1 \vec{\rho}_2) \rightarrow 1)$  den Wert hat:

$$V_{12}^{\text{Str.}} = \frac{1}{2} V_{12}^D.$$

Dadurch ist von vornherein dem experimentellen Befund Genüge getan, daß sich zwei schwere Teilchen in einem  $S$ -Zustand bei paralleler Spineinstellung ziemlich genau doppelt so stark anziehen als bei antiparalleler.

Die Größen  $a_2$  und  $a_4$  stimmen mit den von Volz (a. a. O.) eingeführt und dort ebenso genannten überein und lassen sich also auch deuten als dimensionslos geschriebene Kombinationen der Heisenberg ( $H$ )-, Majorana ( $M$ )-, Wigner ( $W$ )- und Barlett ( $B$ )-Kräfte bzw. nach Cassen und Condon<sup>1)</sup> und Euler (a. a. O.) der vier durch Linearkombination daraus hervorgehenden, die nach den Zuständen eingeteilt sind, in denen sie zur Wirkung gelangen:

$$a_2 = \frac{-2H - M + 2W + B}{4(H + M + W + B)} = \frac{1}{8} \left( 1 + 3 \frac{{}^{31}A}{{}^{13}A} \right),$$

$$a_4 = \frac{4W + 2B}{4(H + M + W + B)} = \frac{1}{8} \left( 3 + \frac{{}^{31}A}{{}^{13}A} + 3 \frac{{}^{33}A}{{}^{13}A} + \frac{{}^{11}A}{{}^{13}A} \right).$$

${}^{13}A$  mißt dabei die Kraftstärke zwischen Proton und Neutron [nach F. Hund: *Ladungssingulett* (1)], wenn die Spins der beiden Teilchen *parallel* [*Spintriplett* (3)] gerichtet sind. Diese Art der Wechselwirkung ist beim Grundzustand des Deuterons verwirklicht. Bei der Proton-Protonstreuung (*Ladungstriplett*, *Spinsingulett*) tritt allein die Kraft  ${}^{31}A$  auf.  ${}^{33}A$  gehört zum Ausdruck für die Wechselwirkung zwischen gleichen Teilchen mit parallelen,  ${}^{11}A$  zum entsprechenden zwischen Proton und Neutron mit antiparallelen Spinen.

Der Wert der beiden Zahlen  $a_2$  und  $a_4$  läßt sich aus der Theorie der leichtesten Kerne nur sehr ungenau ermitteln<sup>2)</sup>. Die

1) B. Cassen u. E. U. Condon, Phys. Rev. **50**, S. 846. 1936.

2) S. Flügge, Ztschr. f. Phys. **105**, S. 522. 1937.

Darstellung der Massendefekte der *schweren* Atomkerne hingegen ist empfindlich von deren Größe abhängig. Dies rührt daher, daß die für gewisse Wertebereiche der  $a_2$  und  $a_4$  sich zeigenden *nicht-sättigenden Eigenschaften der Kräfte* bei hohen Teilchenzahlen überhaupt erst ihre Wirkung entfalten können.

Unter Berücksichtigung dieses Verhaltens konnte Volz für die  $a_2, a_4$  das in Abb. 1 eingezeichnete unschrattierte Gebiet abgrenzen, dem beide Werte entstammen müssen, wenn die Wechselwirkungs-

energie (1) auch zur Beschreibung der schweren Atomkerne geeignet sein soll.

Die *Kemmersche Bedingung* schließt, wenn sie in Schärfe erfüllt wäre, auch noch das rechts von der durch  $P_1$  gehenden, zur  $a_4$ -Achse parallelen Begrenzungsline aus und damit bliebe überhaupt nur noch die Wahl zwischen Wertepaaren auf dieser Geraden.

Dazu ist aber zu bemerken, daß erstens bei Berücksichtigung der Fehler, die dem Modell anhaften, statt einer scharfen Grenze ein Band eingezeichnet werden müßte, dessen Größe zwar schwer

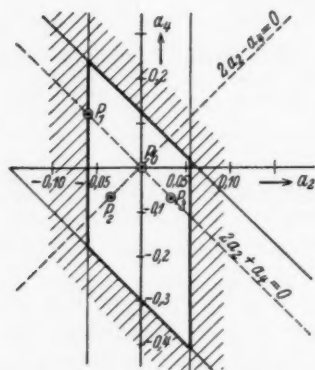


Abb. 1. Der zulässige Wertebereich der Größen  $a_2$  und  $a_4$  nach Volz

abzuschätzen ist, das aber doch von etwa der halben Breite des obigen Parallelogramms sein dürfte.

Zweitens aber kann man die Frage aufwerfen, ob überhaupt die *Kemmersche Bedingung* erfüllt sein muß. Es lassen sich nämlich Gründe dafür anführen, daß Kerne, deren sämtliche Teilchenspins parallel gerichtet sind, nicht entstehen können. Bei den leichtesten Kernen ist auf jeden Fall der Zustand mit etwa gleichen Anzahlen von Rechts- und Linkspins der *energetisch günstigste*, da bei einer Unsymmetrie in irgendeiner Richtung wegen des Ausschließungsprinzips mehr Teilchen in höhere Zustände gesetzt werden müssen als im symmetrischen Falle.

Diese Verhältnisse lassen sich einfach veranschaulichen. Ebenso nämlich, wie man sich über einer  $(N, Z)$ -Ebene eine *Energiefläche* aufgespannt denken kann, die bei den leichten Kernen für  $N = Z$  ein Tal, die *Gamowrinne*, besitzt, läßt sich eine andere über einer Rechts ( $R$ )-, Links ( $L$ )-Spinebene mit einem entsprechenden Minimum bei  $R = L$  ausbreiten.

Wenn man jetzt bei der letzteren zu den schwereren Kernen fortschreitet, befindet sich stets ganz in der Nähe von  $R = L$  ein tiefes Tal und alle Atomkerne werden, wenn sie aus den letzteren durch irgendeinen Aufbauprozeß entstehen, den Zustand mit gleichviel Rechts- und Linksspins bevorzugen.

Bewegt man sich senkrecht zur Talsohle, etwa auf einer Geraden  $R + L = N + Z$ , so muß man, von dem Zustand  $R = L$  ausgehend, erst einen steilen und hohen Berg erklimmen, erreicht aber, wenn schon viele Spins nach der einen Seite umgeklappt sind, beim Vorhandensein von *nichtsättigenden Spin-Spinkräften* den Kamm eines Potentialwalles, hinter dem die Energiefläche dann stark abfällt. Sie wird dabei für große  $N + Z$ , wenn  $R$  oder  $L$  schon  $\approx N + Z$  sind, sogar tiefer absinken können als der Talsohle bei  $R = L$  entspricht.

Obwohl es demnach für gewisse Kräfte bei ganz schweren Kernen energetisch günstiger wäre, alle Teilchenspins parallel zu stellen, werden sich solche Kerne aus denen mit  $R = L$  nicht bilden können. Denn dazu ist erforderlich, daß mit einem Male sehr viele Spins umklappen. Man wird daraus schließen, daß die *Kemmersche Bedingung* jedenfalls nicht als ein zuverlässiges Argument gegen Kräfte mit *schwacher, nichtsättigender Spin-Spinwechselwirkung* betrachtet werden kann.

Es ist dabei zu betonen, daß nichtsättigende Kräfte zwischen gleichen Teilchen hingegen mit Sicherheit auszuschließen sind. Denn durch die Existenz der *Coulombkräfte* verlagert sich bei den schweren Kernen die Gamowrinne von vornherein nach der Seite des Neutronenüberschusses und durch geeignete Wahl von *nichtsättigenden* Kräften zwischen gleichen Teilchen läßt es sich erreichen, daß die Energiefläche über  $\{N, Z\}$  nach der einen Seite hin stetig abfällt. Dann aber wäre es energetisch am günstigsten, wenn der Kern überhaupt nur noch aus Neutronen besteht.

Aus den eben dargelegten Gründen ist es nicht möglich, sich im Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie (1) für ein bestimmtes Wertepaar  $a_2, a_4$  zu entscheiden. Es soll deshalb in dieser Arbeit die Bindungsenergie der Kerne zunächst für beliebige  $a_1, a_4$  berechnet werden, um hinterher dann diejenigen Zahlenwerte für beide Größen ermitteln zu können, die die beste Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit der Erfahrung ermöglichen.

### § 3. Das Näherungsverfahren

Bei der Berechnung der Kernbindungsenergie verfährt man im Anschluß an Euler folgendermaßen: Als Ausgangszustand wird ein Gas aus  $N + Z$  freien Teilchen angenommen, die sich in einem

Volumen  $V$  befinden. Die Kerneigenfunktion ist demzufolge ein *antisymmetrisiertes Produkt aus ebenen Wellen* und als „Energie“ erhält man einfach die *Summe der kinetischen Energien* aller Kernbausteine. Diese Beschreibung wäre nahezu richtig, wenn die Teilchen nur eine kleine gegenseitige Wechselwirkung aufeinander ausübten. In Wirklichkeit wird ein solcher Zustand durch deren gegenseitige Kräfte so stark gestört, daß sich die Kernmaterie eher wie ein Flüssigkeitströpfchen oder sogar in mancher Beziehung wie ein fester Körper<sup>1)</sup> verhält. Aber es ist immerhin möglich, mit der Wechselwirkungsenergie (1) ein *konvergentes Störungsverfahren* durchzuführen, das von dem oben besprochenen *Thomas-Fermi-Gas* ausgeht und dann nach steigenden Potenzen der Kraftstärke fortschreitet.

Freilich ist so nicht zu erwarten, daß man schon nach ein oder zwei Schritten die richtige Energieformel gewinnt. Trotzdem lassen sich aus der *Richtung* in der sich das Störungsverfahren in den ersten beiden Gliedern entwickelt, *Aussagen über die Kräfte* herleiten. Und man kann abschätzen, daß die höheren Näherungen daran nichts Wesentliches mehr ändern werden. Allerdings ist dabei natürlich vorausgesetzt, daß man am Ansatz (1) festhält und nicht etwa *Wechselwirkungen ganz anderer Art* zuläßt.

Man kann sich deshalb bei der Berechnung der Bindungsenergie auf die ersten beiden Glieder der Entwicklung beschränken. Beide haben eine einfache anschauliche Bedeutung, die schon von Euler näher besprochen wurde. Das *erste, gebildet als Erwartungswert des Ausdrucks* (1), stellt die Bindungsenergie dar, wie sie in einer sehr homogenen *Neutronen-Protonenflüssigkeit* vorhanden wäre, deren Dichte an jeder Stelle zeitlich konstant ist.

Das *zweite Glied* dagegen rührt gerade her von den *Schwankungen dieser Dichte* um ihren Mittelwert und weist hin auf die vielfach erörterte  $\alpha$ -Teilchenstruktur der Atomkerne. Sein Beitrag wird um so größer sein, je mehr sich  $\alpha$ -Teilchen bilden können. Er erreicht sein Maximum für *gerade und gleiche*  $N$  und  $Z$ . Ein starker *Neutronenüberschuß* wirkt also  $\alpha$ -Teilchenbildungen gerade entgegen.

Bei den in der *Natur vorkommenden Atomkernen* ist allerdings der Neutronenüberschuß im Verhältnis zur Gesamtzahl aller Teilchen stets so klein, daß die von ihm herrührende *Auflösung der  $\alpha$ -Teilchen* die im Störungsglied zweiter Ordnung gewonnene Bindungsenergie nur *geringfügig* herabsetzt.

1) Man denke an die von Schüler entdeckten *Quadrupolmomente* der Atomkerne und an die von Meitner gefundene *Dreifachisomerie* beim Uran, vgl. auch: W. Wefelmeier, Ztschr. f. Phys. 107. S. 332. 1937.



Die Energieverhältnisse bei den wirklichen Kernen sind daher nicht sehr verschieden von denen bei Kernen mit  $N = Z$ . Man wird deshalb die theoretisch sich ergebenden Formeln, wenn man das Verhalten des Neutronenüberschusses untersuchen will, sofort nach den Abweichungen des „Zustandes“  $N \neq Z$  von dem mit  $N = Z$  entwickeln.

Auf diese Weise erhält man einen der halbempirischen *Weizsäcker-Betheschen Energieformel*:

$$(2) \quad \frac{1000 E}{M c^2 (N + Z)} = -14,9 + 21 \left( \frac{N - Z}{N + Z} \right)^2 + \frac{14,2}{(N + Z)^{1/2}} + 0,625 \frac{Z^2}{(N + Z)^{1/2}}$$

völlig ähnlichen Ausdruck.

Aufgabe dieser Rechnungen kann es allerdings nur sein, die *Zahlenkoeffizienten der ersten beiden Glieder*  $-14,9$  und  $21$  theoretisch zu verstehen bzw. umgekehrt aus ihrer Größe Schlüsse auf die Kernkräfte zu ziehen.

Die zwei letzten Glieder in (2), die Beiträge der *Oberflächen- und Coulombenergie*, sind stets klein gegen die Summe der ersten beiden und werden im Rahmen dieser Theorie nicht weiter behandelt. Und zwar sind die *Oberflächeneffekte* nicht berücksichtigt, weil alle Rechnungen im Prinzip nur für den *unendlich ausgedehnten* Kern gelten. Vom Ausdruck für die *Coulombenergie* kann man dagegen annehmen, daß er um nicht mehr als etwa 10% falsch sein kann. Es ist ja so gewonnen, daß man einfach die Wechselwirkung von  $Z$  *gleichmäßig über das Kerninnere* verbreiteten Protonen nach der *Hartreemethode* berechnet. Für die „*weitreichenden*“ Coulombkräfte ist dies sicher eine gute Näherung und die Korrekturen, die von den Dichteschwankungen im Kern herrühren, werden, wie das schon mehrfach betont wurde, sehr klein sein. Die größere Unsicherheit rührt vielmehr daher, daß die Protonen durch ihre *gegenseitige Abstoßung* bei den wirklichen Atomkernen etwas nach dem Kernrande abgedrängt sein werden.

Geht man nun von der entgegengesetzten Annahme aus, alle Protonen säßen in einer sehr *dünnen Schale am Kernrande*, dann ändert sich in (2) nur der Faktor des vierten Summanden und zwar steht für 0,625 der Wert 0,563. Die Energiewerte der beiden Extremfälle des in der Natur realisierten Zustandes unterscheiden sich also um genau 10%. Diese Differenz ist dann ein plausibles Maß für die mögliche Ungenauigkeit des Coulombgliedes, soweit sie davon herrührt, daß das zugrunde liegende Modell nur eine rohe Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Hinzu kommt noch die Unsicherheit in der heutigen Kenntnis des Kernradius, die auch



mit etwa  $\pm 10\%$  zu veranschlagen ist. Das Coulombglied kann demnach immer noch mit einem Fehler bis zu etwa  $14\%$  behaftet sein.

Es erhebt sich noch die Frage, wie genau der Koeffizient des zweiten Summanden in (2) festliegt. In der halbempirischen *Weizsäcker-Betheschen Theorie* folgt zunächst aus dem Verlauf der Talsohle der Gamowrinne im wesentlichen nur das Verhältnis der beiden Koeffizienten 21 vom zweiten und 0,625 vom vierten Summanden. Dieses ist aber auf wenige Prozent genau bekannt, da ja die Talsohle ganz in der Nähe der Kerne mit *ungeradem Z* vorbeiführen muß, von denen in fast allen Fällen nicht mehr als ein stabiles Isotop bekannt ist. Die Unbestimmtheit des fraglichen Koeffizienten wird deshalb als ebenso groß (etwa  $14\%$ ) einzuschätzen sein wie die des Coulombgliedes.

#### § 4. Die Thomas-Fermi-Energie

Im folgenden werde nunmehr die Kernbindungsenergie berechnet. Als *Wellenfunktion des Ausgangszustandes* setzt man an

$$(3) \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(N+Z)!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1), & \psi_1(2), & \dots & \psi_1(N+Z) \\ \psi_2(1), & \psi_2(2), & \dots & \psi_2(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_i(1), & \psi_i(2), & \dots & \psi_i(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_k(1), & \psi_k(2), & \dots & \psi_k(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{N+Z}(1), & \psi_{N+Z}(2), & \dots & \psi_{N+Z}(N+Z) \end{vmatrix}$$

Die  $\psi_j$  seien die auf Eins normierten Wellenfunktionen der einzelnen Teilchen und so angeordnet, daß die ersten  $Z$  Protonen zugehören und die Form besitzen:

$$\psi_j(k) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathfrak{R}_k r_k} \begin{Bmatrix} \alpha_j(\sigma_k) \\ \beta_j(\sigma_k) \end{Bmatrix} \pi_j(q_k). \\ (j = 1, 2, \dots, Z).$$

$\alpha_j$  und  $\beta_j$  sind die bekannten Spinfunktionen und die  $\sigma_k$  die zugehörigen Variablen. Die Funktion  $\pi_j(q_k)$  hängt ab von der Ladungsvariablen  $q_k$ , die nur zweier Werte  $p$  und  $n$  fähig ist. Analog den vorhergehenden ist sie definiert durch die Gleichung:

$$\pi_j(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } q_k = p \\ 0 & \text{für } q_k = n. \end{cases}$$

Sie bringt also zum Ausdruck, ob der betrachtete Zustand des Protons gerade besetzt ist oder nicht.

Die entsprechende Funktion für die *Neutronen* lautet

$$\nu_j(q_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } q_k = p \\ 1 & \text{für } q_k = n. \end{cases}$$

Und alle Wellenfunktionen in (3), deren Indizes größer  $Z$  sind, haben demgemäß die Gestalt:

$$\psi_j(k) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathfrak{P}_k r_k} \left\{ \begin{matrix} \alpha_j(\sigma_k) \\ \beta_j(\sigma_k) \end{matrix} \right\} \nu_j(q_k).$$

$$(j = Z + 1, \dots, N + Z).$$

Die kinetische Energie des Gases der  $N + Z$  freien Teilchen ergibt sich jetzt aus:

$$(4) \quad E_0 = - \frac{\hbar^2}{2M} \int \Psi_0^* \sum_{i=1}^{N+Z} \text{grad}_i^2 \Psi_0 d\tau.$$

Das Integralzeichen soll die Spin- und Ladungssummationen mit einschließen. Man erhält:

$$(5) \quad E_0 = 2 \sum_{i=1}^{N+Z} \frac{\mathfrak{P}_i^2}{2M} = \sum_{i=1}^Z \frac{\mathfrak{P}_i^2}{M} + \sum_{i=Z+1}^{N+Z} \frac{\mathfrak{P}_i^2}{M}.$$

Es ist dabei angenommen worden, daß  $N$  und  $Z$  ganze Zahlen seien und jeder Zustand, wenn er besetzt ist, immer entweder ein oder zwei Teilchenpaare mit entgegengesetzten Spinen enthält. Also muß auch gelten:

$$2 \sum_{i=1}^Z = Z \quad 2 \sum_{i=Z+1}^{N+Z} = N.$$

Die Summationen in (5) ersetzt man jetzt durch Integrationen über die tiefsten der im Volumen  $V$  möglichen Zustände der Protonen und Neutronen. Und weiter werde so verfahren, als seien sie alle vom Impuls Null bis zu den durch  $Z$  und  $N$  und das Volumen  $V$  bestimmten Maximalimpulsen<sup>1)</sup> gleichmäßig dicht aufgefüllt:

$$(6) \quad |\mathfrak{P}_Z|_{\max} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{2Z}{N+Z}} \frac{\hbar}{r_0}; \quad |\mathfrak{P}_N|_{\max} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{2N}{N+Z}} \frac{\hbar}{r_0}.$$

Dann gilt:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^Z = \frac{V}{h^3} \int_0^{P_{Z\max}} d\mathfrak{P} = \frac{3(N+Z)}{16\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2Z}{N+Z}}} d\mathfrak{p} \\ \text{und} \\ \sum_{i=Z+1}^{N+Z} = \frac{V}{h^3} \int_0^{P_{N\max}} d\mathfrak{P} = \frac{3(N+Z)}{16\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2N}{N+Z}}} d\mathfrak{p}. \end{array} \right.$$

$r_0$  ist dabei eine Länge, die ein Maß für den mittleren Teilchenabstand im Kern darstellt. Sie ist definiert durch die Gleichung:  $V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 (N + Z)$ .

Der Ausdruck  $r_0 \sqrt{N+Z}$  spielt also die Rolle des Kernradius. Die dimensions-

1) Bethe-Bacher, Rev. Mod. Phys. 8. S. 153 ff. 1936.

lose Variable  $p$  mißt den *Teilchenimpuls* in Einheiten:  $p' = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\hbar}{r_0}$ . Diese Größe einzuführen ist deshalb zweckmäßig, weil dann die oberen Grenzen beider Integrale von Eins nur wenig verschieden sind. Entwickelt man sie nämlich nach einem Parameter:

$$(8) \quad \delta = \frac{N - Z}{3(N + Z)},$$

so wird:

$$(9) \quad \begin{cases} c = \sqrt[3]{\frac{2Z}{N+Z}} = 1 - \delta - \delta^2 - \dots \\ d = \sqrt[3]{\frac{2N}{N+Z}} = 1 + \delta - \delta^2 + \dots \end{cases}$$

Der Parameter  $\delta$  ist für alle bekannten Kerne eine sehr kleine Zahl. ( $^{200}_{80}\text{Hg}$ :  $\delta = \frac{1}{15}$ .)

Wenn man jetzt die Summation in (5) nach der Vorschrift (7) ausführt, erhält man für die *kinetische Energie* der Teilchen:

$$E_0 = \frac{27}{40} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} \frac{\hbar^2}{M r_0^2} (N + Z) (1 + 5\delta^2).$$

Für die späteren Rechnungen ist es bequem, noch die Größe  $r_0$  durch:

$$x = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{r_0}$$

auszudrücken. Dabei stellt  $x$  bei festem, vorgegebenem  $a$  ein Maß für die *Kerndichte* dar. Es ergibt sich schließlich:

$$(10) \quad E_0 = \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{M a^2} (N + Z) x^2 (1 + 5\delta^2).$$

Das ist also der Ausdruck für die *kinetische Energie* eines Gases von  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen, die *ohne gegenseitige Wechselwirkung* das Volumen  $V$  erfüllen. Dabei gilt (10) nur, so lange  $N \approx Z$  ist ( $\delta \ll 1$ ).

Jetzt werde die *Wechselwirkungsenergie* (1) eingeschaltet. Man hat dann die Störungsenergie erster Ordnung, also den *Erwartungswert* von (1), zu bilden:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int \Psi_0^* \sum_{i=1}^{N+Z} \sum_{k \neq i} V_{ik} \Psi_0 d\tau.$$

Dieser Ausdruck ist bereits mehrfach<sup>1)</sup> berechnet worden und kann einfach übernommen werden: Er lautet in den hier eingeführten Einheiten:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 = -(N + Z) & \left\{ \frac{9}{8} - 2a_2 - a_4 \right. \\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} A f(x) \\ & + \frac{3\delta^2}{\sqrt{\pi}} A \cdot \left[ \left( \frac{7}{8} - a_4 \right) \varphi(x) + \left( \frac{1}{4} - 2a_2 \right) \psi(x) \right] \\ & \left. + \frac{x^2}{6\pi} A f \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right) [2a_2 + a_4 + 9\delta^2(2a_2 - a_4)] \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. Bethe-Bacher, a. a. O.

Dazu ist folgendes zu bemerken. Die rechte Seite von (11) enthält, wie das dem ersten Schritte einer solchen Näherungsentwicklung entspricht, die Kraftstärke  $A$  als linearen Faktor. Zusammen mit der kinetischen Energie  $E_0$  (10) liefert sie die *Thomas-Fermi-Energie* der Atomkerne.

Die Funktion  $f(x)$  ist definiert durch die Gleichung:

$$(12) \quad f(x) = -\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} + e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) + \sqrt{\pi} \Phi(x) = \begin{cases} \sim \frac{x^3}{6} & \text{für } x \ll 1 \\ \sim \sqrt{\pi} & \text{für } x \gg 1. \end{cases}$$

Die Abkürzung  $\Phi(x)$  steht dabei für das Gauss'sche Fehlerintegral. Die Funktion  $f(x)$  hat die Eigenschaft, daß sie für kleine  $x$  verschwindet, für große dagegen dem Sättigungswert  $\sqrt{\pi}$  zustrebt. Sie gilt exakt im ganzen Wertebereich der  $x$ .

Das letztere trifft nicht zu für die beiden anderen in (11) noch auftretenden Ausdrücke für  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$ :

$$(13) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} - x - \frac{e^{-x^2}}{x} \\ \psi(x) = \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{-x^2}. \end{cases}$$

Beide stellen Entwicklungen des allgemeinen Ausdrucks von  $E_1$  für beliebige  $N$  und  $Z$  nach steigenden Potenzen von  $\delta x$  dar und sind nur dann angenähert richtig, wenn  $\delta x < 1$  ist. Diese Bedingung ist aber für alle bekannten Kerne ( $\delta \leq \frac{1}{15}$ ) und für die hier interessierenden  $x$ -Werte ( $2 \leq x \leq 5$ ) erfüllt.

Die exakte Formel für  $E_1$  enthält kein Glied, dessen Verhalten für sehr große  $x$  dem linearen Anstieg von  $\varphi(x)$  in (13) entspräche.

Die physikalische Bedeutung der einzelnen Glieder von  $E_1$  in (11) und ihr Verhalten für verschiedene Kräfte ( $a_2, a_4$ ) werde erst später im Zusammenhang mit den Beiträgen der Störungsenergie zweiter Ordnung besprochen.

### § 5. Die Schwankungsbindung

Die *Thomas-Fermi-Bindung* wurde im letzten Abschnitt im Prinzip so gewonnen, daß man den *Mittelwert der Wechselwirkungsenergie* (1) bildet, genommen über alle möglichen Besetzungen des Phasenraumes der im Volumen  $V$  zunächst frei beweglichen Teilchen. Die Zustände vom Impuls Null bis zu den durch (6) bestimmten Maximalimpulsen waren gleichmäßig dicht und voll besetzt. In Wirklichkeit ist diese Beschreibung eine viel zu rohe Näherung, wie man ja daher weiß, daß diese Methode nur etwa die  *Hälfte der potentiellen Kernbindung* mit Deuteronkräften liefert. Im folgenden werden deshalb noch alle die Beiträge berücksichtigt, die davon herühren, daß sich zwei Teilchen unter dem Einfluß der Kräfte von (1) gegenseitig anregen und vorübergehend in einen höheren Impulszustand gehoben werden.

Dabei werden natürlich nur solche *Übergänge* möglich sein, bei denen die Impulse der Teilchen im *Zwischenzustand* größer sind als deren durch (6) festgelegten Maximalwerte.

In der *Wellenfunktion des angeregten Zustandes*:

$$(14) \quad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{(N+Z)!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1), & \psi_1(2), & \dots & \psi_1(N+Z) \\ \psi_2(1), & \psi_2(2), & \dots & \psi_2(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_i(1), & \chi_i(2), & \dots & \chi_i(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_k(1), & \chi_k(2), & \dots & \chi_k(N+Z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{N+Z}(1), & \psi_{N+Z}(2), & \dots & \psi_{N+Z}(N+Z) \end{vmatrix}$$

stellen demgemäß die beiden Funktionen  $\chi_i(n)$ ,  $\chi_k(n)$  solchen Impulsen zugeordnete ebene Wellen dar.

Berechnet man jetzt das *Matrixelement*  $V_{01}$  für den Übergang des *Grundzustandes* (3) in den *höheren* (14):

$$(15) \quad \begin{cases} V_{01} = \int \chi_i^*(1) \chi_k^*(2) V(1, 2) \psi_i(1) \psi_k(2) d\tau \\ - \int \chi_i^*(1) \chi_k^*(2) V(1, 2) \psi_i(2) \psi_k(1) d\tau, \end{cases}$$

dann ist die *Störungsenergie zweiter Ordnung* gegeben durch den Ausdruck:

$$(16) \quad E_2 = \sum_{\text{bes. Zstde.}} \sum_{\text{anger. Zstde.}} \frac{V_{01} V_{10}}{E_0 - E_1}.$$

Die Summation in (16) zerfällt in drei einzelne, da auch drei Arten von Anregungen zu unterscheiden sind, und zwar:

1. je zwei Protonen,
2. je zwei Neutronen,
3. je ein Proton und ein Neutron

gehen in höhere Zustände.

Es seien nun  $p, q$  die in den Einheiten von (7) gemessenen *Protonenimpulse* vor,  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  die entsprechenden *nach* der Anregung und  $n, m$  bzw.  $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$  analog definierte Größen für die Neutronen.

Weiter werde mit  $V_{p,q}^{\mathfrak{P},\mathfrak{Q}}$  das *Matrixelement* bezeichnet:

$$V_{p,q}^{\mathfrak{P},\mathfrak{Q}} = \frac{1}{V^2} \int e^{-\frac{i\mathbf{x}}{h} (\mathfrak{P}\mathbf{r}_1 + \mathfrak{Q}\mathbf{r}_2 - p\mathbf{r}_1 - q\mathbf{r}_2) - \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{a}\right)^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

welches nach Euler die Größe hat:

$$(17) \quad V_{p,q}^{\mathfrak{P},\mathfrak{Q}} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{x^3}{N+Z} e^{-\frac{x^2}{4}(\mathfrak{P}-p)^2} \delta(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} - p - q).$$

Dann lautet der Ausdruck für die Störungsenergie zweiter Ordnung jetzt:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2 = & -\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{bes.} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}}}^{(N)} \sum_{\substack{\text{unbes.} \\ \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}}} \left( c_1 \frac{|V_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}}|^2}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} - E_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}} + c_2 \frac{V_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} V_{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}*}}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} - E_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}} \right) \\ & -\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{bes.} \\ \mathfrak{n}, \mathfrak{m}}}^{(N)} \sum_{\substack{\text{unbes.} \\ \mathfrak{N}, \mathfrak{M}}} \left( c_1 \frac{|V_{\mathfrak{n}, \mathfrak{m}}^{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}|^2}{E_{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}} - E_{\mathfrak{n}, \mathfrak{m}}} + c_2 \frac{V_{\mathfrak{n}, \mathfrak{m}}^{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}} V_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}}^{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}*}}{E_{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}} - E_{\mathfrak{n}, \mathfrak{m}}} \right) \\ & -\sum_{\substack{\text{bes.} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{n}}}^{(Z, N)} \sum_{\substack{\text{unbes.} \\ \mathfrak{P}, \mathfrak{N}}} \left( c_3 \frac{|V_{\mathfrak{p}, \mathfrak{n}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{N}}|^2}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{N}} - E_{\mathfrak{p}, \mathfrak{n}}} + c_4 \frac{V_{\mathfrak{p}, \mathfrak{n}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{N}} V_{\mathfrak{n}, \mathfrak{p}}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{N}*}}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{N}} - E_{\mathfrak{p}, \mathfrak{n}}} \right). \end{aligned} \right.$$

Die ersten beiden Zeilen rühren her von den Übergängen zwischen gleichen Teilchen, die letzte von denen zwischen den Protonen und Neutronen. Um bei den Summationen zu vermeiden, daß die Übergänge zwischen den Protonen und Neutronen mehrfach gezählt werden, erhielten die entsprechenden Glieder den Faktor 1/4. Es wird ja bei diesen zweimal unabhängig voneinander über die Zustände summiert und beide Male jeder einzelne Übergang doppelt gezählt.

$c_1$  bis  $c_4$  sind quadratische Kraftkombinationen, die sich durch die Ausführung der Spinladungssummationen ergeben.

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= 2({}^{31}A^2 + 3{}^{33}A^2), \\ c_2 &= 2({}^{31}A^2 - 3{}^{33}A^2), \\ c_3 &= \frac{1}{2}(3{}^{13}A^2 + {}^{31}A^2 + 3{}^{33}A^2 + {}^{11}A^2), \\ c_4 &= \frac{1}{2}(3{}^{13}A^2 + {}^{31}A^2 - 3{}^{33}A^2 - {}^{11}A^2). \end{aligned} \right.$$

Unter Berücksichtigung der Matrixelemente (17) und der ihnen analogen, bei denen  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{q}$  vertauscht sind, läßt sich nunmehr  $E_2$  berechnen. Man wird dazu die Summen nach der Vorschrift (7) wieder in Integrale verwandeln. Weiter läßt sich die in (17) durch die  $\delta$ -Funktion ausgedrückte Forderung der Impulserhaltung bei den Übergängen durch den Ansatz vorwegnehmen:

$$(20) \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \mathfrak{s}; \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{q} - \mathfrak{s}.$$

$\mathfrak{s}$  mißt also den bei der virtuellen Anregung übertragenen Impuls. Und die obige Beziehung besagt nur, daß beide Teilchen Stöße gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung aufnehmen.

Wie bereits früher besprochen wurde, müssen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  größer sein als die durch (6) festgelegten Maximalimpulse. Dadurch wird der Wertebereich der  $\mathfrak{s}$  eingeschränkt auf:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & | \mathfrak{p} + \mathfrak{s} | > c \quad | \mathfrak{q} - \mathfrak{s} | > c \\ & \text{wobei aber} \\ & | \mathfrak{p} | < c \quad | \mathfrak{q} | < c \end{aligned} \right.$$

sein muß.

Ganz analoge Beziehungen gelten für die Größen  $n$  und  $m$ . Nur ist dann zu beachten, daß an Stelle von  $c$  der Wert  $d$  einzusetzen ist.

Wenn man zunächst nur denjenigen Anteil von  $E_2$  aufschreibt, der von den Proton-Proton-Übergängen herrührt, so ergibt sich:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2^p &= -\frac{1}{4} \sum_{p,q}^{(Z)} \sum_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}}^{\text{bes.} \quad \text{unbes.}} \left( c_1 \frac{|V_{\mathfrak{P}, q}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}}|^2}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} - E_{p,q}} + c_2 \frac{V_{\mathfrak{P}, q}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} V_{q, p}^{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}*}}{E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} - E_{p,q}} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{M a^2}{\hbar^2 x^2} \left( \frac{2 x^2}{3 \sqrt{\pi(N+Z)}} \right)^2 \left( \frac{3(N+Z)}{2^4 \pi} \right)^2 \left[ c_1 \int_0^\infty d\mathfrak{s} \int d\mathfrak{p} \int d\mathfrak{q} \frac{e^{-\frac{x^2}{2} \mathfrak{s}^2}}{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q}} \right. \\ &\quad \left. + c_2 \int_0^\infty d\mathfrak{s} \int d\mathfrak{p} \int d\mathfrak{q} \frac{e^{-\frac{x^2}{4} \mathfrak{s}^2 - \frac{x^2}{4} (\mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q})^2}}{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q}} \right] \end{aligned} \right.$$

$\begin{matrix} |p| < c & |q| < c \\ |p+\mathfrak{s}| > c & |q-\mathfrak{s}| > c \end{matrix}$

Die Nenner der Integranden stellen die Energiedifferenzen in den Gliedern der ersten Zeile dar. Es ist ja:

$$E_{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}} - E_{p,q} = \frac{\hbar^2 x^2}{a^2} \frac{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 - p^2 - q^2}{2M} = \frac{\hbar^2 x^2}{M a^2} (\mathfrak{s}, \mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q}).$$

Die in (22) auftretenden Integrale sind für  $c=1$  von Euler bereits ausgewertet und zwar gilt für das erstere:

$$(23) \quad \frac{15}{32 \pi^3} x^4 \int_0^\infty d\mathfrak{s} \int d\mathfrak{p} \int d\mathfrak{q} \frac{e^{-\frac{x^2}{2} \mathfrak{s}^2}}{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q}} = g(x).$$

$\begin{matrix} |p| < 1 & |q| < 1 \\ |p+\mathfrak{s}| > 1 & |q-\mathfrak{s}| > 1 \end{matrix}$

$$g(x) \approx 10(1 - \ln 2) - \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{2x^4} + \frac{0,16}{x^6}$$

für  $x \geq 1,6$ ; Möglicher Fehler  $\leq 2\%$ .

$$g(x) \sim \frac{5}{3} \sqrt{2\pi} x^3 \text{ für } x \ll 1.$$

Das zweite dagegen lautet:

$$(24) \quad \frac{15}{32 \pi^3} x^4 \int_0^\infty d\mathfrak{s} \int d\mathfrak{p} \int d\mathfrak{q} \frac{e^{-\frac{x^2}{4} \mathfrak{s}^2 - \frac{x^2}{4} (\mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q})^2}}{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q}} = k(x).$$

$\begin{matrix} |p| < 1 & |q| < 1 \\ |p+\mathfrak{s}| > 1 & |q-\mathfrak{s}| > 1 \end{matrix}$

Und für  $k(x)$  gilt die Entwicklung:

$$k(x) \approx \frac{20}{x^4} \left\{ 1 + \frac{4}{5x^2} + \frac{54}{35x^4} - \frac{x^2}{6} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( 1,36 + \frac{15,91}{x^2} + \frac{9,43}{x^4} + \dots \right) \right\}$$

für  $x \geq 2$ ; Möglicher Fehler  $\leq 2\%$ .

$$k(x) \sim \frac{5}{3} \sqrt{2\pi} x^3 \text{ für } x \ll 1.$$



Die Integrale von (22) gehen aus den letzteren durch eine einfache Maßstabstransformation der  $x$  hervor. Wenn man diese ausführt, erhält man schließlich:

$$E_2^{pp} = - \frac{Ma^2}{\hbar^2} \frac{N+Z}{5 \cdot 2^7 \pi} \cdot c^3 \{c_1 g(c x) + c_2 k(c x)\}.$$

In gleicher Weise ergibt sich die Schwingungsbindung der Neutronen untereinander:

$$E_2^{nn} = - \frac{Ma^2}{\hbar^2} \frac{N+Z}{5 \cdot 2^7 \pi} \cdot d^3 \cdot \{c_1 g(dx) + c_2 k(dx)\}.$$

Der Beitrag zur Störungsenergie zweiter Ordnung, der von den Neutron-Proton-Übergängen herrührt, läßt sich nicht in ebenso einfacher Weise angeben. Denn man erhält:

$$\begin{aligned} E_2^{np} = & - \sum_{p,n}^{\text{bes.}} \sum_{p,n}^{\text{unbes.}} \left( c_3 \frac{|V_{p,n}^{p,n}|^2}{E_{p,n}^{p,n} - E_{p,n}^{p,n}} + c_4 \frac{V_{p,n}^{p,n} V_{n,p}^{p,n}}{E_{p,n}^{p,n} - E_{p,n}^{p,n}} \right) \\ = & - \frac{Ma^2}{\hbar^2} \frac{3(N+Z)}{2^{10} \pi^4} x^4 \left[ c_3 \int_0^\infty d\tilde{s} \int d\tilde{p} \int d\tilde{n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\tilde{s}^2}}{\tilde{s}, \tilde{s} + p - n} \right. \\ & \left. + c_4 \int_0^\infty d\tilde{s} \int d\tilde{p} \int d\tilde{n} \frac{e^{-\frac{x^2}{4}\tilde{s}^2 - \frac{x^2}{4}(\tilde{s} + p - n)^2}}{\tilde{s}, \tilde{s} + p - n} \right]. \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen des inneren und äußeren Integrals unterscheiden sich um die Differenz  $c - d$ , also gerade um Glieder der Größenordnung  $\delta^2$ , die in dem hier erörterten Problem von Bedeutung sind. Die Auswertung der Integrale wurde näherungsweise für Dichten  $x \geq 2$  durchgeführt.

Setzt man:

$$\frac{15}{32 \pi^3} x^4 \int_0^\infty d\tilde{s} \int d\tilde{p} \int d\tilde{n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\tilde{s}^2}}{\tilde{s}, \tilde{s} + p - n} = G(x),$$

dann folgt für  $G(x)$ :

$$(25) \quad G(x) \approx g(x) - \delta^2 \left\{ 15 + \frac{1}{2x^4} + \frac{0,64}{x^8} - 15x^2 e^{-2x^2} \right\}.$$

Für  $x \geq 2$ ; Möglicher Fehler des Klammersausdrucks bei  $\delta^2$ :  $< 2\%$ .

Für das zweite Integral:

$$\frac{15}{32 \pi^3} x^4 \int_0^\infty d\tilde{s} \int d\tilde{p} \int d\tilde{n} \frac{e^{-\frac{x^2}{4}\tilde{s}^2 - \frac{x^2}{4}(\tilde{s} + p - n)^2}}{\tilde{s}, \tilde{s} + p - n} = K(x)$$

gelangt man zur Formel:

$$(26) \quad K(x) \approx \frac{20}{x^4} - \delta^2 \frac{20}{x^8} \approx k(x) - \delta^2 \frac{20}{x^8}.$$

Wie man der Integraldefinition von  $K(x)$  entnimmt, geht die Funktion für  $c = d = 1$  ( $\delta = 0$ ) in den Ausdruck  $k(x)$  über. Daß läßt sich in (26) berücksichtigen, indem man das Glied  $20/x^4$ , wie es sich aus der Reihenentwicklung von  $K(x)$  für  $x \gg 1$  ergibt, entsprechend den Angaben von (24) durch  $k(x)$  ersetzt.

Die Abhängigkeit des Ausdrucks (26) von  $\delta^2$  wird durch das dort auftretende Glied  $-\delta^2 \frac{20}{x^4}$  nur in grösster Annäherung richtig beschrieben. Man kann zu einer Abschätzung des möglichen Fehlers für dieses gelangen, wenn man die durch die sehr ähnlichen Definitionsgleichungen von  $K(x)$  und  $k(x)$  nahegelegte Annahme macht, daß die exakte Reihenentwicklung des mit  $\delta^2$  behafteten Ausdrucks ähnlich rasch konvergiert wie die für  $k(x)$ .

Tabelle 1

Vergleich der Funktionswerte von  $k(x)$  mit dem Werte seines ersten Entwicklungsgliedes für grobe  $x$

| $x$ | $k(x)$ | $20/x^4$ | $\left(\frac{20}{x^4} - k(x)\right) \frac{100}{k(x)}$ |
|-----|--------|----------|---|
| 2,0 | 0,93   | 1,25     | 35%   |
| 2,5 | 0,50   | 0,51     | 2%  |
| 3,0 | 0,256  | 0,247    | 3%  |
| 4,0 | 0,081  | 0,078    | 3%  |
| 5,0 | 0,032  | 0,032    | $\ll 1\%$   |

In der Tab. 1 ist der Unterschied zwischen  $k(x)$  und seinem ersten Entwicklungsglied  $20/x^4$  angegeben. Wie man sieht, ist er nur für  $x \approx 2$  von erheblicher Bedeutung. Für  $2,5 < x < 5$  dagegen stellt das erste Glied bereits eine recht gute Annäherung an die Funktion  $k(x)$  dar.

Ähnliche Verhältnisse dürfen aus dem oben dargelegten Grunde bei dem mit  $\delta^2$  multiplizierten Ausdruck in  $K(x)$  vorliegen. Man wird sich deshalb für die weiteren Rechnungen mit der Entwicklung (26) begnügen können, zumal aus den Untersuchungen von Euler bereits bekannt ist, daß das  $K(x)$  entsprechende Integral  $k(x)$  nur sehr wenig zur Energie beiträgt.

Die gesamte Schwerkungsbindung hat nunmehr die Gestalt:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2 &= E_2^{pp} + E_2^{nn} + E_2^{np} \\ &= -\frac{Ma^2}{\hbar^2} \frac{N+Z}{5 \cdot 2^6 \cdot \pi} \left\{ \frac{c_1}{2} [c^3 g(cx) + d^3 g(dx)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_2}{2} [c^3 k(cx) + d^3 k(dx)] + 2c_3 G(x) + 2c_4 K(x) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für Kerne ohne Neutronenüberschuß wird  $c = d = 1$ . Außerdem gehen  $G(x)$  und  $K(x)$  in die Funktionen  $g(x)$  und  $k(x)$  über. Dann aber erhält man genau den von Euler für  $N = Z$  bereits angegebenen Ausdruck.

(27) gilt unter Berücksichtigung der Integraldefinitionen für  $G(x)$  und  $K(x)$  zunächst noch für jedes beliebige Verhältnis von Protonen

und Neutronenzahl. Man wird entsprechend den früher besprochenen Gründen jetzt alle Glieder nach steigenden Potenzen von  $\delta$  entwickeln und hinter den mit  $\delta^2$  multiplizierten Summanden der Reihe abbrechen.

Mit den Abkürzungen für die von  $x$  abhängigen Funktionen

$$h(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} + \frac{2,88}{x^6} + \dots$$

$$l(x) = \frac{40}{x^4} \left\{ 2 + \frac{36}{5x^2} + \frac{216}{7x^4} - e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ 0,113 x^6 + 1,213 x^4 + 4,54 x^2 + 11,58 + \frac{22,63}{x^2} + \frac{30,86}{x^4} \right] \right\}.$$

$$H(x) = -15 - \frac{1}{2x^4}; \quad L(x) = -\frac{20}{x^2}$$

und den Kraftkombinationen:

$$m = \frac{31A^2}{13A^2} + 3 \frac{31A^2}{13A^2} = \frac{c_1}{2 \cdot 13A^2}; \quad n = \frac{31A^2}{13A^2} - 3 \frac{31A^2}{13A^2} = \frac{c_2}{2 \cdot 13A^2}.$$

$$p = 3 + \frac{31A^2}{13A^2} + 3 \frac{31A^2}{13A^2} + \frac{11A^2}{13A^2} = \frac{2c_3}{13A^2};$$

$$q = 3 + \frac{31A^2}{13A^2} - 3 \frac{31A^2}{13A^2} - \frac{11A^2}{13A^2} = \frac{2c_4}{13A^2}.$$

erhält man schließlich: ( $13A = A$ ).

$$(28) \left\{ E_2 = -\frac{Ma^2}{\hbar^2} \frac{(N+Z)A^2}{5 \cdot 2^6 \cdot \pi} \left\{ (2m+p)g(x) + (2n+q)k(x) + \delta^2 [mh(x) + nl(x) + pH(x) + qL(x)] \right\} \right\}.$$

Dieser Ausdruck stellt also die gesamte Störungsenergie zweiter Ordnung in ihrer Abhängigkeit von der Größe  $x$ , dem Neutronenüberschuß und den Kraftkombinationen  $m, n, p, q$  dar. Er stellt eine brauchbare Näherungsentwicklung dar, solange  $\delta x < 1$  ist. Nichtsättigende Glieder enthält er nicht, denn  $E_2$  ist ja einfach proportional zu  $N+Z$ . Es zeigt sich also, daß auch bei Berücksichtigung des Neutronenüberschusses, die nichtsättigenden Eigenschaften der Kernkräfte nur in der Thomas-Fermi-Bindung eine Rolle spielen.

## § 6. Die Gesamtenergie

Die Gesamtbindungsenergie des Atomkerns ergibt sich jetzt einfach als Summe der Ausdrücke (10) für die kinetische Energie, (11) für die Thomas-Fermi- und (28) für die Schwankungsbindung. Man erhält:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \frac{E}{N+Z} &= \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{M a^3} x^2 \\ &- \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{9}{8} - 2 a_2 - a_4 \right) f(x) - \frac{A(2 a_2 + a_4)}{6 \pi} x^3 \\ &\cdot f \left( \frac{\sqrt[3]{9 \pi (N+Z)}}{x} \right) - \frac{M a^2}{\hbar^2} \frac{A^2}{5 \cdot 2^6 \cdot \pi} F_1(x, a_2, a_4) \\ &+ \delta^2 \left\{ \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{M a^3} x^2 + \frac{3 A}{\sqrt{\pi}} G_1(x, a_2, a_4) + \frac{3 A}{2 \pi} (-2 a_2 + a_4) x^3 \right. \\ &\left. \cdot f \left( \frac{\sqrt[3]{9 \pi (N+Z)}}{x} \right) + \frac{M a^2}{\hbar^2} \frac{A^2}{5 \cdot 2^6 \cdot \pi} H_1(x, a_2, a_4) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Als Abkürzungen wurden benutzt:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} F_1(x, a_2, a_4) &= (2m + p) g(x) + (2n + q) k(x) \\ G_1(x, a_2, a_4) &= 2 \left( a_2 - \frac{1}{8} \right) \psi(x) + \left( a_4 - \frac{7}{8} \right) \varphi(x) \\ H_1(x, a_2, a_4) &= -m h(x) - n l(x) - p H(x) - q L(x). \end{aligned} \right.$$

Im folgenden soll jetzt der Reihe nach die *physikalische Bedeutung* der einzelnen Summanden von (29) und im Zusammenhang damit ihre Abhängigkeit von der Dichte und der Wahl der Kräfte besprochen werden. Bezüglich der letzteren kann man sich auf die Betrachtung jener beschränken, die den  $a_2 a_4$ -Werten der vier Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  der Abb. 1 entsprechen:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} P_0: & a_2 = 0; & a_4 = 0. \\ P_1: & a_2 = -\frac{1}{16}; & a_4 = \frac{1}{8} \\ P_2: & a_2 = -\frac{1}{32}; & a_4 = -\frac{1}{16} \\ P_3: & a_2 = \frac{1}{32}; & a_4 = -\frac{1}{16}. \end{aligned} \right.$$

Die Kenntnis des Verhaltens von (29) für die angegebenen vier Kräfte genügt nämlich, um die Abhängigkeit der Gesamtenergie von den Symmetrieverhältnissen der Wechselwirkung (1) in Spin und Ladung in dem unschraffierten Bereich der Abb. 1 zu überblicken.

Das *erste Glied* in (29) stellt die *kinetische Energie* der freien Teilchen eines Thomas-Fermi-Gases von *gleichviel* Protonen und Neutronen dar. Sein Beitrag zur Energie ist positiv. Mit wachsendem  $x$  steigt er quadratisch an. Dieses Verhalten ist der Ausdruck dafür, daß die kinetische *Nullpunktsenergie* vom freien Teilchen um so größer ist, je genauer ihr Ort festliegt.

Das zweite Glied, der sättigende Anteil der Thomas-Fermi-Bindung, wirkt überhaupt erst im Sinne einer gegenseitigen Bindung der Kernbausteine, und zwar hat es für alle vier Kräfte einen negativen Wert. Das liegt daran, daß im ganzen noch erlaubten Gebiet der Abb. 1 die Ungleichung erfüllt ist:  $2a_2 + a_4 < \frac{9}{8}$ .

Der Koeffizient vor  $f(x)$  ist also stets positiv. Der Verlauf von

$$\left(\frac{9}{8} - 2a_2 - a_4\right)f(x)$$

ist für die verschiedenen Kräfte in Abb. 2 dargestellt. Wie man sieht, ist der Beitrag des zweiten Gliedes zur Gesamtenergie nur wenig von der Wahl der Kräfte abhängig und solange man sich nur auf der Geraden  $2a_2 + a_4 = 0$  bewegt, ist er sogar stets derselbe.

Ganz anders verhält sich der dritte Summand von (29). Zunächst einmal steigt die Funktion

$$x^3 f\left(\frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x}\right)$$

mit wachsendem  $x$  derartig rasch an, daß bei geeigneter Wahl der  $a_2$ ,  $a_4$  und  $x$  die von ihm herrührende Bindungsenergie die empirischen Massendefekte weit übersteigen kann. Dies widerspricht aber allgemeinen, in mehreren Arbeiten bereits hervor-

gehobenen, quantenmechanischen Gesichtspunkten. Um dies zu vermeiden, muß man deshalb annehmen, daß  $2a_2 + a_4$  auf jeden Fall eine sehr kleine Zahl ist.

Weiterhin ist der Betrag dieses Gliedes positiv oder negativ, je nachdem man sich auf der einen oder anderen Seite der durch den Nullpunkt gehenden Geraden  $2a_2 + a_4 = 0$  befindet. (In Abb. 1 gestrichelt eingezeichnet.)

Es liegt deshalb nahe, wie dies Volz und Feenberg auch vorschlugen, den Ausdruck  $2a_2 + a_4$  exakt gleich Null zu setzen. (1. Sättigungsbedingung.) In den weiteren Betrachtungen wird sich zeigen, daß der Punkt  $P_2$ , für den diese Forderung nicht erfüllt ist, auch aus anderen Gründen zur Darstellung der empirischen Verhältnisse der Atomkerne nicht geeignet ist.

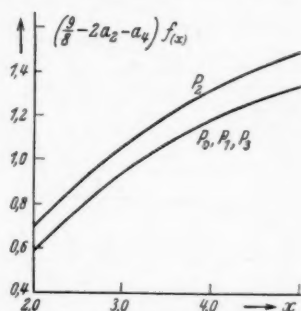


Abb. 2. Die Funktion  $\left(\frac{9}{8} - 2a_2 - a_4\right)f(x)$  für die verschiedenen Kräfte (Thomas-Fermi-Bindung)

Das vierte Glied rührt her von der  $\alpha$ -Teilchenbildung im Kern. Es erhöht die Bindungsenergie für alle vier Kräfte. Die Funktion  $F_1(x, a_2, a_4)$  hat nach Abb. 3 die Eigenschaft, daß sie im ganzen erlaubten Wertebereich der  $a_2, a_4$  für die in Betracht kommenden  $x$  stets das positive Vorzeichen besitzt.

Die Gesamtheit der bisher besprochenen ersten vier Summanden von (29) liefert denjenigen Beitrag zur Kernbindung, dem in der

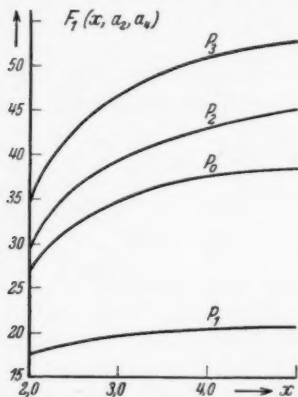


Abb. 3. Die Funktion  $F_1(x, a_2, a_4)$  für die verschiedenen Kräfte (Schwankungsbindung)

Weizsäcker - Betheschen Formel (2) das erste Glied  $(-14,9)$  entspricht.

Die Abhängigkeit vom Neutronenüberschuß hingegen, wie sie dort durch den Ausdruck  $21 \frac{(N-Z)^2}{(N+Z)^2}$  wiedergegeben wird, beschreibt in (29) das Glied mit dem Faktor  $\delta^2$ . Jeder seiner vier Summanden in der geschweiften Klammer ist dabei genau einem der  $\delta^2$ -freien, oben besprochenen zugeordnet.

Der erste von ihnen stammt von der kinetischen Energie. Sein positives Vorzeichen besagt, daß es im Gase freier Teilchen mit gleichen Anzahlen  $Z$  und  $N$  energetisch ungünstig ist, Protonen in Neutronen zu verwandeln. Denn diese müssen wegen des Pauliprinzipis in Zustände höherer Energie gesetzt werden.

Das zweite, vom sättigenden Anteil der Thomas-Fermi-Bindung herrührend, wirkt ebenso wie das vorhergehende auch der Bildung eines Neutronenüberschusses entgegen. Gleichzeitig nämlich mit dem Anwachsen der kinetischen Energie in dem oben behandelten Prozeß tritt eine Verminderung der potentiellen auf. Man sieht dies unmittelbar am Matrixelement (17) für die Wechselenergie (1). Dies enthält nämlich die Differenz der Teilchenimpulse im Exponent der Gaussfunktion. Die Bindung ist demnach im Mittel um so geringer, je mehr sich die einzelnen Teilchengeschwindigkeiten voneinander unterscheiden.

Die Funktion  $G_1(x, a_2, a_4)$  ist in Abb. 4 dargestellt. Wie man sieht, ist sie im zulässigen Gebiet der  $a_2, a_4$  überall positiv.

Das dritte gibt die nichtsättigende Wirkung der Kräfte im Neutronenüberschuß an. Man schließt wie oben, daß  $2a_2 - a_4$  eine

kleine Zahl sein muß. Aber es ist zu bedenken, daß Wechselwirkungen dieser Art wegen des sehr kleinen Koeffizienten  $\delta^2$  vor dem Klammerausdruck auf die Gesamtenergie keinen sehr großen Einfluß haben. Man wird deshalb  $2a_2 - a_4$  nicht von vornherein gleich Null setzen können. Das Glied wird dabei je nach Wahl der  $a_2, a_4$  im Sinne einer Abstoßung oder Anziehung zwischen den Neutronen beigetragen.

Das letzte endlich rührt wieder her von der *Schwankungsbindung*. Es ist, wie man Abb. 5 entnimmt, *stets positiv*. Das heißt aber,

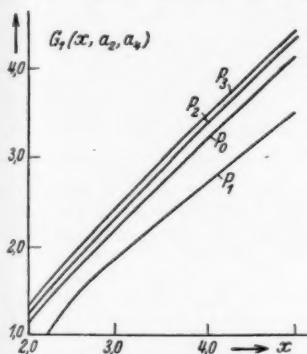


Abb. 4. Die Funktion  $G_1(x, a_2, a_4)$   
(Thomas-Fermi-Bindung  
im Neutronenüberschuß)

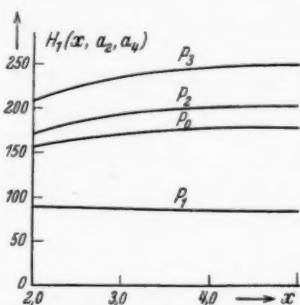


Abb. 5. Die Funktion  $H_1(x, a_2, a_4)$   
(Schwankungsbindung  
im Neutronenüberschuß)

daß es die  $\alpha$ -Teilchenbildung gerne verhindern möchte. Anschaulich ist das unmittelbar klar, denn es können sich im Kern eben dann die meisten  $\alpha$ -Teilchen zusammenfinden, wenn der Neutronenüberschuß möglichst gering ist.

Aufgabe der weiteren Rechnung ist es, für die verschiedenen Spin-Ladungsabhängigkeiten (31) die *Energieminima* von (29) als Funktion von  $x$  aufzusuchen, um ein Bild darüber zu gewinnen, wie  $a_2$  und  $a_4$  zu wählen sind, damit die beiden *empirischen Koeffizienten* der *Weizsäcker-Betheschen Formel* angenähert richtig dargestellt werden.

#### § 7. Das Energieminimum.

##### Die Radien- und die Neutronenüberschußbedingung

Für die zahlenmäßigen Rechnungen ist es zweckmäßig, die Gl. (29) dimensionslos zu schreiben. Die Energie  $E$  und die Kraftstärke  $A$  werden deshalb in  $Mc^2/1000$  die Reichweite  $a$  in Elektronenradien gemessen:



$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \varepsilon \frac{Mc^3(N+Z)}{1000} \quad A = A_1 \frac{Mc^3}{1000} \\ a = a_1 \frac{c^3}{m c^3} \end{array} \right.$$

Mit den Abkürzungen:

$$(33) \quad V = \varepsilon \frac{a_1^2}{x^3} \quad \text{und} \quad W = A_1 \frac{a_1^2}{x^3}$$

erhält man dann für  $V$  den Ausdruck:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = 1,664 - W \left[ 0,564 \left( \frac{9}{8} - 2a_2 - a_4 \right) f(x) + 0,0531 (2a_2 + a_4) x^3 \right. \\ \quad \cdot f \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right) \left. \right] - W^2 \cdot 1,80 \cdot 10^{-4} x^2 F_1(x, a_2, a_4) \\ \quad + \delta^2 \left\{ 8,320 + W \left[ 1,688 G_1(x, a_2, a_4) + 0,478 (-2a_2 + a_4) x^3 \right. \right. \\ \quad \cdot f \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right) \left. \left. \right] + W^2 \cdot 1,80 \cdot 10^{-4} x^2 H_1(x, a_2, a_4) \right\} \end{array} \right.$$

Die Dichte an der Stelle des *Energieminimums* berechnet man aus der *Gleichgewichtsbedingung*:

$$(35) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Dabei ist es im Sinne des hier durchgeführten Näherungsverfahrens konsequent, das  $x_{\min}$  für  $\delta = 0$  aufzusuchen und dann mit diesem  $V$  aus (34) auch für  $\delta \neq 0$  ( $\leq \frac{1}{15}$ ) zu berechnen. Denn der „Zustand“  $N \neq Z$  der Atomkerne wurde ja nur als eine kleine Störung des anderen behandelt, in dem beide Teilchenzahlen gleich sind.

Die zu lösende Gl. (35) hat die Gestalt:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 3,328 - W \left[ 0,564 \left( \frac{9}{8} - 2a_2 - a_4 \right) x f'(x) + 0,159 (2a_2 + a_4) x^3 \right. \\ \quad \cdot f \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right) - 0,0531 \sqrt[3]{9\pi(N+Z)} x^2 f' \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right) \left. \right] \\ \quad - W^2 \cdot 1,80 \cdot 10^{-4} x^3 F_1'(x, a_2, a_4). \end{array} \right.$$

(34) und (36) enthalten beide noch die Gesamtteilchenzahl  $(N+Z)$ . Diese verschwindet aus ihnen nur dann exakt, wenn man *Volzsche Kräfte* ( $a_2 = a_4 = 0$ ) ansetzt oder man hinterher  $(N+Z)$  gegen Unendlich gehen läßt. Für andere Kräfte wären, streng genommen, die Gleichungen für jedes einzelne  $(N+Z)$  gesondert zu lösen. Da aber die Funktion  $f \left( \frac{\sqrt[3]{9\pi(N+Z)}}{x} \right)$  für große  $(N+Z)$  und den in Frage kommenden Wertebereich der  $x$  ihrem Grenzwert  $\sqrt{\pi}$  bereits

sehr nahe gekommen ist, sie also nur noch wenig von der Teilchenzahl  $(N + Z)$  abhängt, man andererseits bei der Untersuchung des Neutronenüberschusses die Energieverhältnisse eines ganz bestimmten Kernes betrachten muß, so werde weiterhin  $N + Z = 200$  (Hg-Kern) gesetzt.

Bei der Auswertung der Ausdrücke (34) und (36) verfährt man folgendermaßen: Für eine ganz bestimmte Kraft wird für jeden  $x$ -Wert das zugehörige  $W$  aus (36) ausgerechnet. Dazu ist nur eine quadratische Gleichung zu lösen. Mit beiden Größen zusammen ergibt sich dann  $V$  an der Stelle des Minimums nach (34). Man kann sich so eine Tabelle für den in Frage kommenden  $x$ -Wertebereich  $2 \leq x \leq 5$  anlegen und dann alle weiteren Angaben durch eine Dimensionsbetrachtung herleiten.

*Wertetabelle:* Zusammenhang zwischen  $x_{\min}$ ,  $W$  und  $V$  für die verschiedenen Kräfte.

Tabelle 2

| Kräfte<br>$x$ | $P_0: a_2 = 0; a_4 = 0$ |                |                           | $P_1: a_2 = -\frac{1}{16}; a_4 = \frac{1}{8}$ |                |                           |
|---------------|-------------------------|----------------|---------------------------|---|----------------|---------------------------|
|               | $W$                     | $V_{\delta=0}$ | $V_{\delta=\frac{1}{15}}$ | $W$   | $V_{\delta=0}$ | $V_{\delta=\frac{1}{15}}$ |
| 2,0           | 5,48                    | - 0,729        | - 0,628                   | 6,37  | - 0,954        | - 0,821                   |
| 2,5           | 5,27                    | - 1,678        | - 1,549                   | 6,14  | - 1,868        | - 1,679                   |
| 3,0           | 5,52                    | - 3,07         | - 2,90                    | 6,42  | - 3,16         | - 2,89                    |
| 4,0           | 6,40                    | - 7,02         | - 6,73                    | 7,37  | - 6,45         | - 5,92                    |
| 5,0           | 7,27                    | -12,98         | -12,52                    | 8,33  | -11,12         | -10,16                    |

| Kräfte<br>$x$ | $P_2: a_2 = -\frac{1}{32}; a_4 = -\frac{1}{16}$ |                |                           | $P_3: a_2 = \frac{1}{32}; a_4 = -\frac{1}{16}$ |                |                           |
|---------------|---|----------------|---------------------------|--|----------------|---------------------------|
|               | $W$   | $V_{\delta=0}$ | $V_{\delta=\frac{1}{15}}$ | $W$  | $V_{\delta=0}$ | $V_{\delta=\frac{1}{15}}$ |
| 2,0           | 6,67  | - 1,23         | - 1,10                    | 5,07   | - 0,647        | - 0,559                   |
| 2,5           | 8,18  | - 3,94         | - 3,73                    | 4,86   | - 1,621        | - 1,515                   |
| 3,0           | 12,7  | -13,51         | -13,02                    | 5,04   | - 3,02         | - 2,89                    |
| 4,0           | 39,1  | -195           | -190                      | 5,88   | - 7,33         | - 7,14                    |
| 5,0           | 83,5  | -1421          | -1389                     | 6,70   | -14,02         | -13,75                    |

Empirisch ist aus der *Weizsäcker-Betheschen Formel* das  $\epsilon$  von (32) bekannt. Für diesen Wert kann man jetzt eine Beziehung zwischen Kraftstärke und Reichweite gewinnen, indem man für jedes  $x$  und die zugehörigen  $W$ - und  $V$ -Werte  $A_1$  und  $a_1$  aus den Gleichungen berechnet:

$$(37) \quad A_1 = \epsilon_{\text{exp.}} \left( \frac{A_1}{\epsilon} \right)_{\text{theor.}} = \epsilon_{\text{exp.}} \frac{W}{V}; \quad \frac{1}{a_1^2} = \frac{\epsilon_{\text{exp.}}}{x^2 V}.$$

Beide folgen unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (33) für  $W$  und  $V$ . Man erhält nun zwei Kurven ( $A_1, a_1$ ) je nachdem, ob man in (37) für  $V$  den Wert bei  $\delta = 0$  oder  $\delta = \frac{1}{15}$  einsetzt.

Beide sollten bei richtigen Kräften genau zusammenfallen. Tatsächlich liegen sie auch für alle vier Kräfte sehr eng beieinander.

Durch das  $x$  an der Stelle des Energieminimums und die Reichweite ist der jeweilige Kernradius  $R = r_0 \sqrt{N + Z}$  schon mitbestimmt. Man hat so eine Möglichkeit das wirkliche  $a_1$  angenähert zu ermitteln, indem man auf der ( $A_1, a_1$ )-Kurve denjenigen Punkt aufsucht, für den sich der empirische Teilchenabstand ergibt. Einfacher ist es jedoch, eine andere Kraftstärken-Reichweitenkurve zu zeichnen, die die Bedingung für die richtige Darstellung der Kernradien wiedergibt und dann diese mit der vorhergehenden zum Schnitt zu bringen.

Man entnimmt sie den Gleichungen:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{r_{0\text{exp.}}^2} (A_1 r_0^2)_{\text{theor.}} = 8,35 W; \\ \frac{1}{a_1^2} = \frac{\frac{e^2}{m c^2}}{r_{0\text{exp.}}^2 \cdot 0,431 x^2} = \frac{1}{0,1295 x^2} \cdot 1. \end{array} \right.$$

Ein weiteres Kriterium für die Brauchbarkeit der Kräfte erhält man aus einer Betrachtung über die Größe des durch (34) bestimmten Neutronenüberschusses. Es zeigt sich nämlich, daß für die hier behandelten Kräfte und für  $x < 3$  die von der Schwankungsbindung herrührenden Korrekturen an den mit  $\delta^2$  multiplizierten Ausdruck kleiner sind als der Beitrag des Thomas-Fermi-Gliedes. Im einzelnen sind die Verhältnisse in Abb. 6 (S. 383) wiedergegeben. Man entnimmt ihr, daß der Beitrag der Schwankungsbindung um so größer ist, bei je höheren  $x$ -Werten das Energieminimum der Kernmaterie liegt. Es zeigt sich sogar, daß für die zu  $P_2$  und  $P_3$  zugehörigen Spinladungsabhängigkeiten bei geeigneter Wahl von Kraftstärke und Reichweite das Schwankungsglied im Faktor von  $\delta^2$  der Gl. (34) die Beiträge der übrigen übertreffen kann. In diesem Falle verliert das hier eingeschlagene Näherungsverfahren seinen Sinn. Kräfte mit solchen Eigenschaften sind bei den weiteren Betrachtungen deshalb auszuschließen.

1) Der empirische mittlere Teilchenabstand ist der Weizsäcker-Bethe'schen Theorie entnommen und beträgt nach den Angaben von Bethe-Bacher, Rev. Mod. Phys. 8. S. 165. 1936:

$$r_0 = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 0,527 \frac{e^2}{m c^2}.$$

Nach Untersuchungen von Heisenberg zu den Resultaten von Blau und Wambacher<sup>1)</sup> lassen sich die möglichen Werte der Kraftreichweiten bei Annahme eines Gausspotentials mit großer Wahrscheinlichkeit auf das Gebiet einschränken:  $a_1 = 0,85 \pm 10\%$ . Das entspricht einem  $x = 2,43 \pm 14\%$ . In diesem  $x$ -Bereich sind aber für die vier hier diskutierten Kraftarten ( $P_0, P_1, P_2, P_3$ ) die Beiträge der Schwankungsbindung kleiner als die des Thomas-Fermi-Gliedes und dann ist zu verlangen, daß der Faktor  $\delta^2$  in (34) den empirischen Koeffizienten des Neutronenüberschußgliedes, wie er aus (2) folgt, auch angenähert ergibt.

Daraus kann man, ähnlich der Aufstellung der Radienbedingung, eine weitere Kraftstärkenreichweitenkurve bestimmen, die zum richtigen Neutronenüberschuß führt. Man erhält sie, indem man den mit  $\delta^2$  multiplizierten Klammerausdruck in (34) seinem der Weizsäcker-Bethe-Formel entnommenen empirischen Wert (+ 189) gleichsetzt.

Bezeichnet  $w$  den Ausdruck:

$$(39) \quad w = \frac{189}{\text{Faktor von } \delta^2 \text{ in Gl. (34)}},$$

dann erhält man die gesuchte Beziehung (Neutronenüberschußbedingung) aus den Gleichungen:

$$(40) \quad A_1 = w W \quad \frac{1}{a_1^2} = \frac{w}{x^2}.$$

Alle drei Kurven, die für die richtige Darstellung der Gesamtenergie, die entsprechende für die Kernradien und die letzte für den Neutronenüberschuß sollten dann wenigstens angenähert einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen, wenn die Kräfte richtig gewählt sind. In den Abb. 7–10 sind nun die jeweiligen Kurven für die

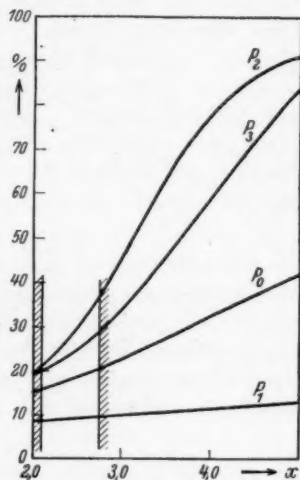
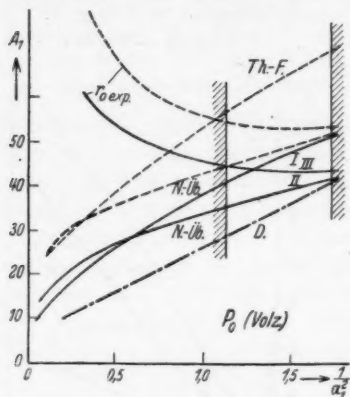
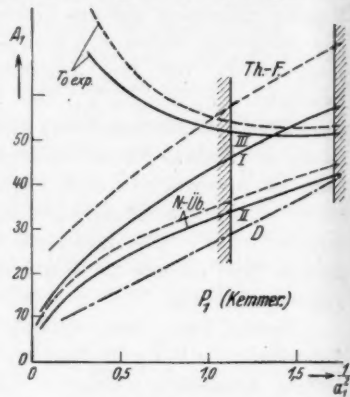
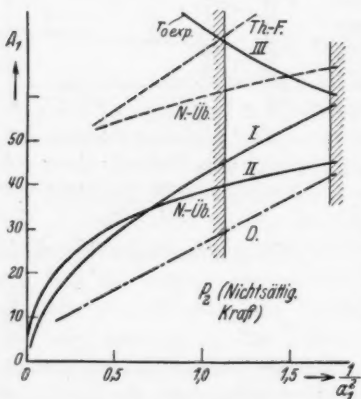
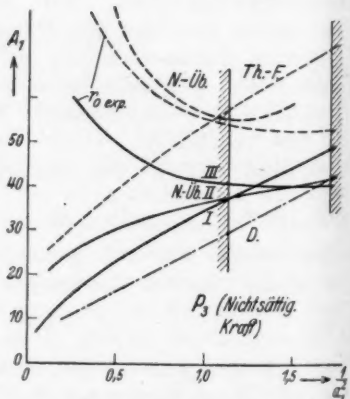


Abb. 6. Anteil der Schwankungsbindung im Neutronenüberschußglied von (34) am Gesamtausdruck

1) Noch nicht veröffentlicht. Herrn Prof. Dr. W. Heisenberg danke ich für die freundliche mündliche Mitteilung dieser Ergebnisse, die er im Anschluß an seine Arbeit „Der Durchgang sehr energiereicher Korpuskeln durch den Atomkern“, Ber. d. sächsischen Akad. d. Wiss. Leipzig 89. S. 369. 1937, bei der Deutung der von Blau und Wambacher beobachteten Kernverdampfungen gewonnen hat. M. Blau u. H. Wambacher, Nature 140. S. 585. 1937.

vier Kräfte (31) eingezeichnet. Gleichzeitig sind immer noch jene beigefügt, die erstens aus der Theorie des Deuterons (strichpunktiert) und zweitens aus der *Thomas-Fermi-Theorie* (gestrichelt) folgen.

Abb. 7. Kraft für  $P_0$ Abb. 8. Kraft für  $P_1$ Abb. 9. Kraft für  $P_2$ Abb. 10. Kraft für  $P_3$ 

Es bedeutet:

I: Kurve für die richtige Darstellung der Gesamtenergie (2. Näherung).

II: Neutronenüberschußbedingung (2. Näherung).

III: Radienbedingung (2. Näherung).

Gestrichelt: Die entsprechenden Kurven in Thomas-Fermischer Näherung.

Strichpunktiert: Deuteronkurve.

Man entnimmt ihnen folgendes:

1. *Volzsche Kraft* ( $P_0$ , Abb. 7). Wenn man zunächst nur darauf achtet, wie sich für diese Kräfte die Lage der verschiedenen Kurven beim Übergang von der Thomas-Fermi-Näherung zum Energieausdruck, der die Störungsglieder 2. Ordnung mitenthält, geändert hat, so zeigt sich, daß alle drei Kurven um etwa denselben Betrag tiefer gerückt sind. Aus Abb. 6 kann man weiter ablesen, daß in dem hier interessierenden Dichtebereich der Anteil der Schwingungsbindung am Neutronenüberschußglied von (34) im ungünstigsten Falle 21% beträgt. Das Störungsverfahren konvergiert also ziemlich rasch. Man kann deshalb überschlagsmäßig annehmen, daß bei Berücksichtigung noch höherer Entwicklungsglieder die Kurven um nicht mehr als nochmals denselben Betrag nach unten rücken werden.

Die Energiekurve ( $I$ ) dürfte dann ganz in der Nähe der des Deuterons ( $D$ ) verlaufen und die Schnittpunkte der letzteren mit der Neutronenüberschuß- ( $II$ ) und der Radienbedingung ( $III$ ) werden etwa in dem nach Heisenberg zulässigen Reichweitengebiet liegen. Eine Kraft aus diesem Bereich hätte die Eigenschaft, die Bindungsenergie, den Neutronenüberschuß und den Kernradius gleichzeitig angenähert richtig darzustellen.

Man kann aus diesen Betrachtungen schließen, daß aus den Ergebnissen der hier durchgeführten Rechnungen jedenfalls kein Argument gegen die von Volz vorgeschlagene Spin-Ladungsabhängigkeit der Kernkräfte gewonnen werden kann. Vielmehr besteht die Aussicht, daß eine Fortführung der Störungsrechnung diese in noch günstigerem Lichte erscheinen läßt als dies in der hier behandelten zweiten Näherung der Fall ist.

2. *Kemmersche Kraft* ( $P_1$ , Abb. 8). Vergleicht man die oben besprochenen Verhältnisse mit denen, wie sie aus Abb. 8 für Kemmersche Kräfte abzulesen sind, so fällt zunächst auf, daß die von der Schwingungsbindung herrührenden Verschiebungen der Kurven ( $I$ ,  $II$ ,  $III$ ) wesentlich geringer sind als im vorhergehenden Falle. Dies entspricht ganz den Angaben der Abb. 6, nach der für diese Kräfte die Beiträge der Störungsenergie 2. Ordnung immer unter 10% bleiben. Die von ihr herrührenden Korrekturen am Ausdruck für die Gesamtenergie sind also in diesem Falle sehr klein. Man kann daraus zwar nicht schließen, daß die Beiträge der höheren Entwicklungsglieder im Sinne eines rasch konvergierenden Näherungsverfahrens ebenso schnell weiter abnehmen werden, aber man wird annehmen dürfen, daß die drei Kurven bei

Berücksichtigung aller weiteren Entwicklungsglieder nicht viel mehr, als dem Schritt von der ersten zur zweiten Näherung entspricht, nach unten rücken.

Der Schnittpunkt von II (Neutronenüberschuß) mit D (Deuteron) fällt dann in das Gebiet der zulässigen Reichweiten. Auch die Kurve I (Gesamtenergie) wird in der Nähe von D verlaufen. Die Radienbedingung III dagegen dürfte in einigem Abstand über dieser liegen.

Bei richtiger Darstellung von Gesamtenergie und Neutronenüberschuß würde sich also der Kernradius etwas zu groß ergeben und zwar erhöhte sich der Wert um etwa 15 % gegenüber den Gamowschen Radien. Man befindet sich also bei Verwendung von Kemmerschen Kräften und etwas grober Beurteilung der Genauigkeit der heutigen Kernradienbestimmung gerade an der Grenze ihres möglichen Wertebereichs.

Die Volzsche Spin-Ladungsabhängigkeit der Kernkräfte scheint demnach etwas besser zur Darstellung der hier betrachteten empirischen Verhältnisse geeignet zu sein als die Kemmersche, diese ist jedoch nicht auszuschließen.

3. Die *nichtsättigenden Kräfte* ( $P_2, P_3$ , Abb. 9 und 10). Ganz anders als die beiden bisher besprochenen verhalten sich die zu den Punkten  $P_2$  und  $P_3$  der Abb. 1 gehörigen *nichtsättigenden Kräfte*. Um ihr Verhalten besser überblicken zu können, wurde die eine von beiden ( $P_2$ ) so gewählt, daß in (34) nur nichtsättigende Glieder in den von  $\delta^2$  freien Summanden enthalten sind, die andere umgekehrt gerade so, daß nur bei dem mit  $\delta^2$  multiplizierten Teil solche Ausdrücke auftreten. Beide besitzen nun die Eigenschaft, daß beim Übergang von der ersten zur zweiten Näherung die Energiekurven I sich soweit nach unten verlagern, daß durch diesen einen Schritt bereits der größere Teil des Weges von der Thomas-Fermi- zur Deuteronkurve zurückgelegt ist. Es ist dann zu erwarten, daß durch die hier nicht berücksichtigten weiteren Entwicklungsglieder die Kurven I unter D fallen.

Man erhielte also mit Deuteronkräften eine größere Bindungsenergie als den Beobachtungen entspricht. Kräfte dieser Art sind aber zur Darstellung der empirischen Verhältnisse nicht geeignet.

Die zu  $P_3$  gehörige Kraft ist nur insofern bemerkenswert, als für sie die Schnittpunkte von I, II und III in der hier betrachteten zweiten Näherung ganz in dem nach Heisenberg zulässigen Wertebereich der  $a_1$  und außerdem sehr nahe beieinander liegen. Sie hat



aber neben dem oben besprochenen Nachteil noch den weiteren, daß sie eine nichtsättigende Anziehung unter den Neutronen liefert und demnach einen Neutronenhaufen stabiler werden ließe als einen Kern mit etwa gleichviel Protonen und Neutronen.

Wenn man jetzt unter Berücksichtigung der empirisch ermittelten Oberflächeneffekte und des Coulombgliedes, wie sie durch den dritten und vierten Summanden der Formel (2) beschrieben werden, die Abhängigkeit der Kernbindungsenergie vom Neutronenüberschuß berechnet und dabei die für  $a_1 = 0,85$  folgende Deuteronkraft einsetzt, dann ergibt sich das in Abb. 11 dargestellte Bild.

Während man für die Kemmer-sche Spin-Ladungsabhängigkeit noch eine positive Energie erhält, befindet man sich bei Volzschen Verhältnissen gerade an der Grenze zwischen positiver und negativer Kernenergie. Der Neutronenüberschuß wird in beiden Fällen etwa richtig wiedergegeben.

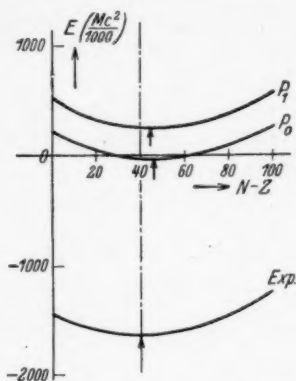


Abb. 11. Gesamtenergie als Funktion des Neutronenüberschusses.  
( $a_1 = 0,85$ ;  $\frac{200}{80}$  Hg)

Zusammenfassend läßt sich also folgendes feststellen. Das Verhalten des Neutronenüberschusses, wie er sich aus dem bis zur Störungsenergie zweiter Ordnung durchgeführten Näherungsverfahren ergibt, hängt sehr davon ab, bei welchen Werten des Verhältnisses  $x$  von Kraftreichweite und mittlerem Teilchenabstand ( $x = 1,52 \frac{a}{r_0}$ ) das Energieminimum der Kernmaterie liegt und welches die Symmetrieeigenschaften in Spin und Ladung der Kräfte sind. Die Feenberg'sche Behauptung, daß die Thomas-Fermi-Theorie den Neutronenüberschuß völlig falsch wiedergeben soll, besteht solange zu Recht, als man Kräfte annimmt, für die  $x_{\min} > 3$  ist, also Kräfte sehr großer Reichweite, für welche die Dichte der Kerne sehr klein wird, und die solche nichtsättigende Eigenschaften besitzen, wie sie durch die  $a_1, a_2$ -Werte der Punkte  $P_2$  und  $P_3$  (Abb. 1) bestimmt sind.

Wenn aber in Wirklichkeit, entsprechend unserer heutigen Kenntnis dieser Größen, die Kraftreichweite  $a$  und die für den

mittleren Teilchenabstand maßgebende Länge  $r_0$  in einem solchen Verhältnis stehen, daß  $x$  in der Gegend  $2,1 < x < 2,75$  liegt, dann wird der Neutronenüberschuß bereits relativ gut durch den bis zur Störungsenergie zweiter Ordnung entwickelten Energieausdruck (34) beschrieben.

Man hat dadurch eine weitere Möglichkeit (Neutronenüberschußbedingung), Aussagen über die Spin-Ladungsabhängigkeit der Kernkräfte zu gewinnen und es läßt sich abschätzen, daß Kräfte von der Art, wie Volz sie vorschlug, die empirischen Daten Bindungsenergie, Neutronenüberschuß und Kernradius gleichzeitig richtig darstellen können. Die von Kemmer angegebenen liefern Kernradien, die um etwa 15% größer sind als die Gamowschen.

(Fortsetzung folgt.)

Leipzig, Institut für theoretische Physik, den 2. Juli 1938.

(Eingegangen 4. Juli 1938)